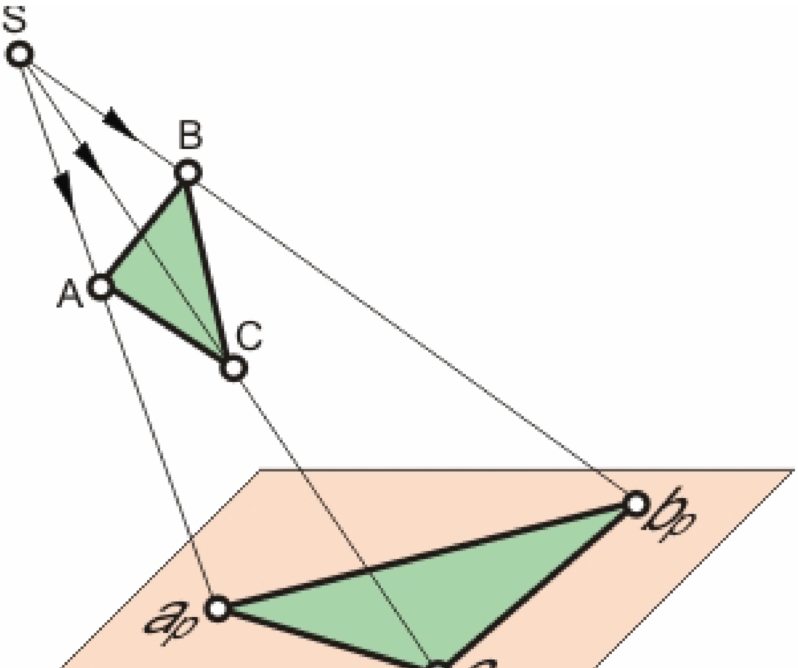
МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКА НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА

В.І. Лусь

НАРИСНА ГЕОМЕТРІЯ

Курс лекцій



Харків ХНАМГ- 2008

УДК 514.18

В.І. Лусь. **Нарисна геометрія:** Курс лекцій. – Харків: ХНАМГ, 2008. - 127 с.

У курсі лекцій розглядаються наступні теми нарисної геометрії: комплексні креслення фігур; позиційні задачі; метричні задачі; розгортки поверхонь; ортогональна аксонометрія.

Наведено приклади розв'язання основних задач і дано умови задач для самостійного розв'язання.

Рекомендовано для студентів наступних напрямів підготовки: 0922 – «Електромеханіка», 0906 – «Електротехніка», 1004 – «Транспортні технології», 0708 – «Екологія».

ЗМІСТ

ВСТУП

Нарисна геометрія входить до числа дисциплін, що становлять основу інженерної освіти. Методи нарисної геометрії знаходять широке застосування в науці й техніці. Вивчення цієї дисципліни сприяє розвитку просторового уявлення і навичок логічного мислення, необхідних інженеру будь-якої спеціальності.

Нарисна геометрія - це розділ геометрії, в якому просторові фігури вивчаються за допомогою їхніх зображень на площині (креслень).

Розробка методів побудови і читання креслень, розв'язання геометричних і технічних задач є предметом вивчення нарисної геометрії. У ній використовуються графічні методи розв'язання задач, тому до креслень ставляться особливі вимоги - оборотність, точність, наочність та ін.

Правила побудови зображень фігур засновано на методі проектування.

Найпоширенішими в нарисній геометрії є креслення, отримані при проектуванні фігур на дві площини - комплексні креслення в системі двох площин проекцій. Під фігурою будемо розуміти будь-яку множину точок. Зображенням точки, що є елементом фігури, є пара точок - дві зв'язані між собою проекції точки. Кожній точки простору відповідає єдина пара точок площини креслення і кожній парі точок площини креслення відповідає єдина точка простору.

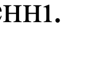
Пари точок площини креслення є геометричною моделлю точки простору. Зображення фігур простору, одержувані методами нарисної геометрії, є геометричними моделями цих фігур на площині.

Між фігурою і її зображенням установлюється жорсткий геометричний зв'язок, що дозволяє судити про форму і розміри фігури за її зображенням.

Задачі в нарисній геометрії звичайно діляться на позиційні (задачі на визначення спільних елементів заданих фігур), метричні (задачі на визначення значень геометричних величин - довжин відрізків, розмірів кутів і т.д.) і конструктивні (задачі на побудову фігур, що задовольняють заданим умовам). Знання елементарної геометрії, методів розв'язання позиційних і метричних задач дає можливість вирішувати й конструктивні задачі.

У даному курсі лекцій розглянуті основні теми навчального курсу нарисної геометрії: комплексні креслення фігур; перетворення комплексного креслення; позиційні й метричні задачі; розгорнення поверхонь; аксонометричні проекції.

ПОЗНАЧЕННЯ І СИМВОЛІКА

A, B, 3, D, E ... або **1, 2, 3, 4, 5** ... - точки в просторі;
a, b, c, d, e, ... - прямі й криві лінії в просторі;
Δ, Ф, Г, Р, Σ … – площини й поверхні в просторі;
Oxyz - система координат у просторі;
Ox, Oy, Oz - осі координат;
= - рівність, збіг;
$\cap$ - перетинання (**b** $\cap$ **Σ = A** - пряма **b** перетинає площина **Σ** у точки **A**, подібний запис буде для кривої і поверхні, однак по тексту зрозуміло, про які фігури йде мова);
$\parallel$ - паралельність (**b** $\parallel$ **d** - пряма **b** паралельна прямій **d**);
$\dot{-}$ – схрещуваність (**m** $\dot{-}$ **n** - прямі **m** і **n** схрещуються);
$\perp$ - перпендикулярність (**e** $\perp$ **Σ** - пряма е перпендикулярна до площини **Σ**);
$\in$ - приналежність елемента множини даній множині (**A** $\in$ **b** - точка **A** належить лінії **b**);
$\subset$ - приналежність підмножини множині (**n** $\subset$ **Σ** - лінія належить поверхні);
$\neq$, $\notin$, $\not\subset$, ... - знаки, що позначають заперечення вказаних вище відношень;
$\to$ – відображення ($A \to A_1$ – точка **A** відображається в точку A_1);
$\Rightarrow$ - знак логічного наслідку;
$П_1$– горизонтальна площина проекцій (**Oxy**);
$П_2$– фронтальна площина проекцій (**Oxz**);
$П_3$– профільна площина проекцій (**Oyz**);
h – горизонталь (пряма, паралельна площині $П_1$);
f – фронталь (пряма, паралельна площині $П_2$);
p - профільна пряма (пряма, паралельна профільній площині **П3**);
$A_1, B_1, 3_1, D_1, E_1$ … або $1_1, 2_1, 3_1, 4_1, 5_1$ … – проекції точок на $П_1$;
$A_2, B_2, 3_2, D_2, E_2$ … або $1_2, 2_2, 3_2, 4_2, 5_2$ … – проекції точок на $П_2$;
$A_3, B_3, 3_3, D_3, E_3$ … або $1_3, 2_3, 3_3, 4_3, 5_3$ … – проекції точок на $П_3$;
a_1, b_1, c_1, d_1, e_1, … – проекції прямих або кривих ліній на $П_1$;
a_2, b_2, c_2, d_2, e_2, … – проекції прямих або кривих ліній на $П_2$;
a_3, b_3, c_3, d_3, e_3, … – проекції прямих або кривих ліній на $П_3$;
$\Delta_1, Ф_1, Г_1, Р_1, \Sigma_{1…}$ …–проекції площин і поверхонь на $П_1$;
$\Delta_2, Ф_2, Г_2, Р_2, \Sigma_{2…}$ …–проекції площин і поверхонь на $П_2$;
$\Delta_3, Ф_3, Г_3, Р_3, \Sigma_{3…}$ …–проекції площин і поверхонь на $П_3$;
$П_4, П_5, П_6$, … – нові (додаткові) площини проекцій;
x_{14}, x_{25}, … – нові осі ($x_{14} = П_1 \cap П_4$, $x_{25} = П_2 \cap П_5$) або x_1, x_2, x_3, …, якщо приналежність осей площинам проекцій не викликає сумнівів;
,  – можливі варіанти графічного позначення прямого кута на кресленні.

ЛЕКЦІЯ № 1. МЕТОД ПРОЕКЦІЙ. ВИДИ ПРОЕКЦІЙ. ВЛАСТИВОСТІ ПРОЕКЦІЙ. КОМПЛЕКСНЕ КРЕСЛЕННЯ ТОЧКИ, ПРЯМОЇ,ПЛОЩИНИ

1. МЕТОД ПРОЕКЦІЙ. ВИДИ ПРОЕКЦІЙ. ВЛАСТИВОСТІ ПРОЕКЦІЙ

1.1. Центральне проектування

Якщо всі проектуючі промені виходять з власної точки (точки, що перебуває в доступному зору просторі) , то проектування називається **центральним**, а сама точка - джерело проектуючих променів називають **центром проектування.** Звичайно центр проекцій позначають буквою **S**.

Таким чином, **апарат проектування** містить у собі: центр проектування, проектуючі промені й площину проектування. Для проектування довільної точки через неї і центр проекцій проводять пряму. Точка перетинання цій прямій з площиною проекцій і є **центральною проекцією заданої точки** на обраній площині проекцій.

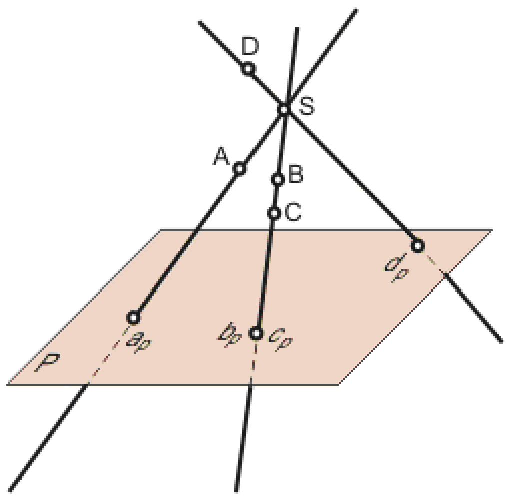


Рис. 1.1

На рис. 1.1 центральною проекцією точки **A** є точка a_p перетину прямої **SA** із площиною **P**. Так само побудовані центральні проекції $\mathbf{b_p}$, $\mathbf{c_p}$, $\mathbf{d_p}$ точок **B, C, D** на площині Р. Прямі, що проходять через центр проекцій і точки, які проектуються, називають **проектуючими прямими.**

Якщо точки розташовані на одній прямій, то при проектуванні, їх проекції збігаються: **B** належить **SB, C** належить **SC** $\mathbf{b_p \equiv c_p}$. **Вся множина точок простору, що належать однієї прямої, яка є проектуючою, має при одному центрі проектування одну центральну проекцію на заданій площині проекцій.**

Але одна проекція точки не дозволяє однозначно визначити її положення у просторі. Для забезпечення оборотності креслення, тобто однозначного визначення положення предмета у просторі за його проекціями, потрібні додаткові умови, наприклад, можна задати другий центр проекцій.

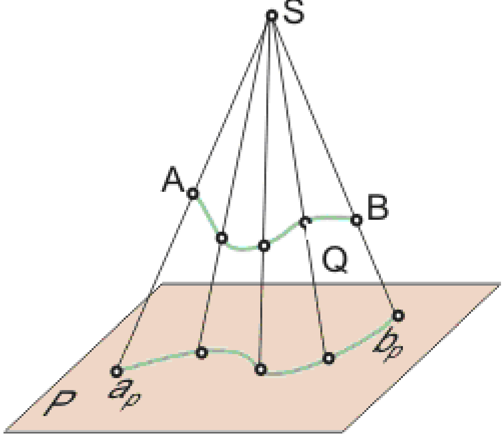


Рис. 1.2

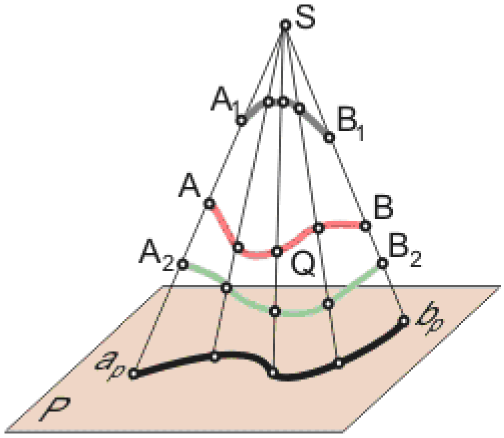


Рис. 1.3

Проекція кривої лінії являє собою лінію перетину проектуючої конічної поверхні із площиною проекцій. Так, на рис. 1.2 проектуюча поверхня **Q** перетинається із площиною проекцій Р по кривій $\mathbf{a_p b_p}$, що є проекцією лінії **АВ**. Однак $\mathbf{a_p b_p}$ - це проекція всіх ліній, що належать проектуючій поверхні **Q** (рис. 1.3).

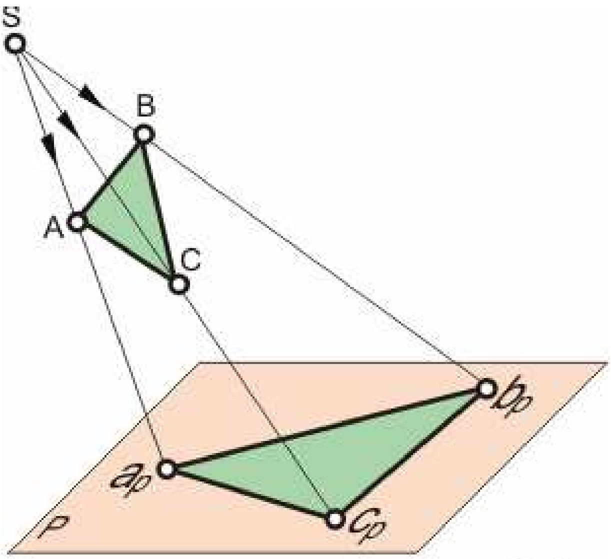


Рис. 1.4

Для побудови проекцій ліній, поверхонь або тіл часто досить побудувати проекції лише деяких характерних точок. Наприклад, при побудові на площині проекцій **Р** проекції трикутника **АВС** (рис. 1.4) досить побудувати проекції $\mathbf{a_p}$, $\mathbf{b_p}$, $\mathbf{c_p}$ трьох його точок - вершин **А, В, С**.

Оригінал, що складається з множини точок, проектується зв'язуванням (пучком) проектуючих променів, які виходять із центра проектування. На практиці для зображення прямої будують не більше 2-х точок. Щоб побудувати многокутник або многогранник будують проекції їхніх вершин, потім з'єднують їх у відповідні фігури, і для многогранників ще встановлюють видимість ребер.

Властивості центрального проектування.

1) Проекція точки є точка.

2) Проекція лінії є лінія.

3) Якщо точка належить лінії, то проекція цієї точки належить проекції лінії.

4) Точка перетину ліній проектується в точку перетину проекцій цих ліній.

1.2 Паралельне проектування

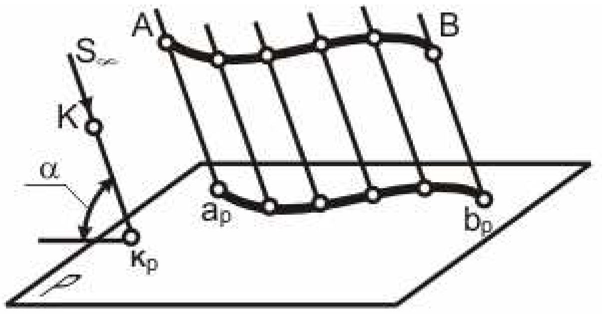


Рис. 1.5

Паралельне проектування (рис. 1.5) можна розглядати як окремий випадок центрального проектування, при якому центр проекцій віднесений у нескінченність (**S**). **При паралельному проектуванні застосовують паралельні проектуючі прямі, проведені в заданому напрямку відносно площини проекцій. Якщо напрямок проектування перпендикулярний до площини проекцій, то проекції називають прямокутними або ортогональними, в інших випадках - косокутними**.

При паралельному проектуванні зберігаються всі властивості центрального проектування, а також виникають нові властивості.

Паралельні проекції, як і центральні, при одному центрі проекцій, також не забезпечують оборотності креслення. Застосовуючи прийоми паралельного проектування точки й лінії, можна будувати паралельні проекції поверхні й тіла.

Властивості паралельного проектування

1) Властивість однозначності. Проекцією точки на площину є точка.

2) Властивість прямолінійності. Проекцією прямої лінії на площину є пряма.

3) Властивість приналежності. Якщо точка належить лінії, то проекція точки належить проекції цієї лінії.

4) Властивість збереження паралельності. Проекціями паралельних прямих є паралельні прямі.

5) Властивість ділення відрізка у відношенні. Якщо відрізок прямої лінії ділиться точкою в якому-небудь відношенні, то й проекція відрізка ділиться проекцією точки в тому ж відношенні.

6) Властивість паралельного переносу. Проекція фігури не міняється при паралельному перенесенні площини проекцій.

Три останні властивості забезпечують більш просту побудову зображення й менше спотворюють форму й розміри оригіналу в порівнянні із центральною проекцією.

Для позначення точок будемо використовувати прописні букви латинського алфавіту або арабські цифри, для позначення ліній - малі літери латинського алфавіту, для позначення поверхонь (площин) - прописні букви грецького алфавіту. Можливі й інші позначення, які будуть введені далі.

1.3 Ортогональне проектування

Візьмемо в просторі довільну площину $\mathbf{П_1}$ (площина проекцій). Нехай точка **A** розташована поза цією площиною (рис. 1.6). Через точку **A** проведемо пряму **s** перпендикулярно до площини проекцій $\mathbf{П_1}$ ($\mathbf{s} \perp \mathbf{П_1}$). Пряма **s** називається проектуючою прямою. Знайдемо точку $\mathbf{A_1}$ перетину прямої **s** із площиною $\mathbf{П_1}$. Точка $\mathbf{A_1}$ називається ортогональною або прямокутною проекцією точки **A** на площині $\mathbf{П_1}$. Процес одержання точки $\mathbf{A_1}$ називається ортогональним або прямокутним проектуванням точки **A** на площину $\mathbf{П_1}$.

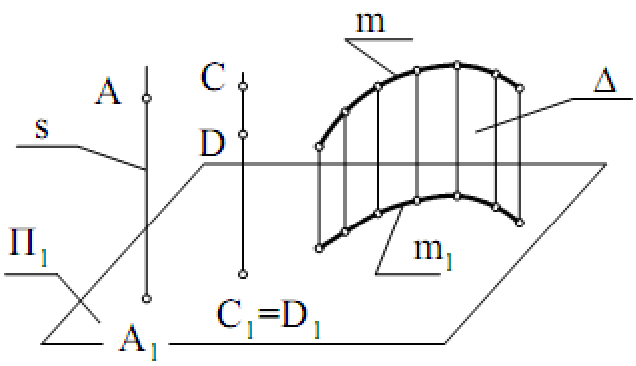


Рис. 1.6

Якщо точки розташовані на одній проектуючій прямій, то ортогональні проекції цих точок збігаються ($\mathbf{C_1} = \mathbf{D_1}$ на рис. 1.6). Такі точки називаються **конкуруючими**. Ортогональною проекцією фігури називається множина ортогональних проекцій всіх точок цієї фігури. На рис. 1.6 ортогональною проекцією кривої **m** є крива $\mathbf{m_1}$. Для одержання $\mathbf{m_1}$ необхідно побудувати проекцію кожної точки лінії **m**. Прямі, що проектують точки кривої на площину, утворюють проектуючу поверхню **Δ**. На рис. 1.6 показано тільки кілька таких проектуючих прямих, які належать поверхні **Δ**.

Розглянемо **основні властивості ортогонального проектування:**

1) **Точка проектується в точку (проекцією точки є точка**).

Якщо точка належить площині проекцій (рис.1.6), то точка і її проекція збігаються (точка проектується сама в себе). Це випливає з визначення проектування.

2) **Пряма, у загальному випадку, проектується в пряму.**

Пряма, перпендикулярна до площини проекцій, проектується в точку. Лінія $\mathbf{m_1}$ (рис. 1.6) є лінія перетину проектуючої поверхні **Δ** і площини проекцій $\mathbf{П_1}$. Якщо замість кривої **m** взяти пряму, то поверхня **Δ** буде площиною, а лінія $\mathbf{m_1}$, як лінія перетину двох площин, буде прямою лінією. Таким чином, пряма лінія, не перпендикулярна до площини проекцій, проектується в пряму лінію.

Для будь-якої точки прямої, перпендикулярної до площини проекцій, сама ця пряма і є проектуючою прямою, тому проекції всіх точок збіжаться, тобто пряма в цьому випадку проектується в точку.

3) Якщо точка належить прямій, то її проекція належить проекції цієї прямої.

Проекцією прямої є множина проекцій всіх її точок, у тому числі згаданої в цій властивості точки.

4) Пересічні прямі в загальному випадку проектуються в прямі, що перетинаються.

Це легко довести, якщо для точки перетину прямих застосувати властивість 3. В окремому випадку проекції пересічних прямих можуть збігатися або одна із прямих може проектуватися в точку, що належить проекції іншої прямої.

5) Паралельні прямі в загальному випадку проектуються в паралельні прямі.

Проектуюча поверхня Δ (рис.1.6) для прямої буде площиною і називається **проектуючою** площиною. Проектуючі площини в паралельних прямих паралельні й перетинаються площиною проекцій по паралельних прямих (проекціям). В окремому випадку проекцією паралельних прямих можуть бути дві точки або прямі, що збігаються.

6) Відрізок проектується у відрізок. Відрізок, перпендикулярний до площини проекцій, проектується в точку.

Довжина проекції відрізка дорівнює довжині відрізка, помноженої на косинус кута нахилу відрізка до площини проекцій (при проектуванні на $\mathbf{\Pi_1}$: $|\mathbf{A_1B_1}|=|\mathbf{AB}|\mathbf{\cos\alpha}$).

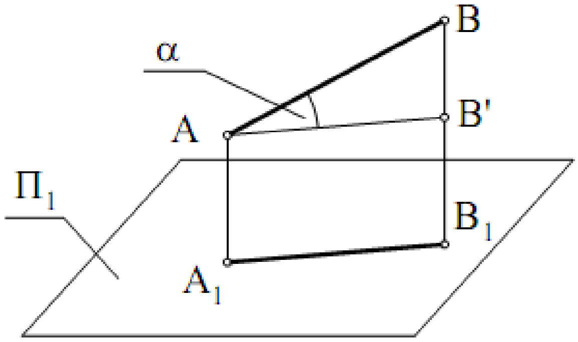


Рис. 1.7

Оскільки пряма проектується в пряму, то і частина прямій (відрізок) проектується в частину прямої (відрізок). На рис.1.7 відрізок **AB** проектується у відрізок $\mathbf{A_1B_1}$. Відрізок **AB’** проведений паралельно відрізку $\mathbf{A_1B_1}$ (**AB’** $\parallel$ $\mathbf{A_1B_1}$). Із прямокутника $\mathbf{A_1AB'B_1}$ і прямокутного трикутника **ABB’** маємо $|\mathbf{A_1B_1}| = |\mathbf{AB'}| = |\mathbf{A\ B}|\mathbf{\cos\alpha}$**.**

Довжина проекції відрізка менше довжини відрізка ($\alpha \neq 0$) або дорівнює довжині відрізка ($\alpha = \mathbf{0}$). Із цієї властивості випливає наступна властивість ортогонального проектування.

7) Відрізок, паралельний площині проекцій, проектується на неї в паралельний і рівний собі відрізок.

8) Відношення довжин відрізків AB і CD, що лежать на паралельних прямих або на одній прямій, при проектуванні не міняється.

Кут нахилу відрізків, згаданих у цій властивості, до площини проекцій однаковий, тому $|\mathbf{A_1B_1}| : |\mathbf{C_1D_1}| = |\mathbf{AB}| \cos\alpha : |\mathbf{CD}| \cos\alpha = |\mathbf{AB}| : |\mathbf{CD}|$.

9) Фігура, що належить площині, паралельній площині проекцій, проектується на площину проекцій у рівну їй фігуру (в натуральну величину).

Будь-який відрізок проектованої фігури паралельний площині проекцій ($\alpha = 0$) і проектується в рівний йому відрізок (довжина проекції відрізка дорівнює довжині відрізка). Це значить, що й вся фігура проектується в рівну їй фігуру або натуральну величину.

10) Якщо дві площини проекцій паралельні, то проекції будь-якої фігури на ці площини рівні.

Кут нахилу будь-якого відрізка фігури до цих площин проекцій однаковий внаслідок їхньої паралельності. Тому відрізок, що з'єднує дві будь-які точки фігури, буде проектуватися на ці площини в рівні відрізки. Це значить, що будь-яка фігура буде проектуватися на паралельні площини в рівні фігури.

11) Величину проекції кута визначають по формулі

$$\cos\varphi_1 = \frac{\cos\varphi - \sin\alpha \cdot \sin\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta}$$

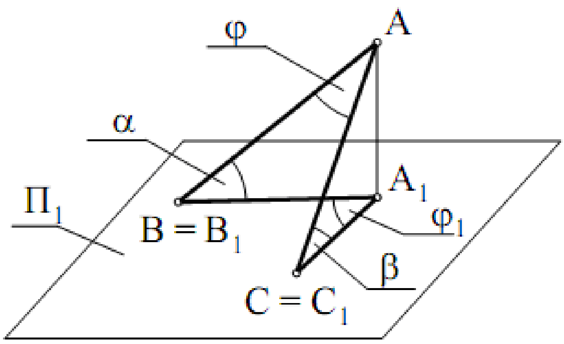


Рис. 1.8

Кут **BAC** проектується в кут $\mathbf{B_1A_1C_1}$ (рис. 1.8). Точки **B** і **C** - це точки перетину сторін кута з площиною проекцій, тому вони проектуються самі в себе. Висновок формули заснований на використанні теореми косинусів для сторони **BC** у трикутниках ABC і $\mathbf{A_1B_1C_1}$. При вивченні властивостей ортогонального проектування рекомендується виконувати креслення типу рис.1.6 для кожної властивості й намагатися уявити собі фігури в просторі. Для розуміння всіх питань нарисної геометрії необхідно подумки представляти фігури й площини проекцій у просторі.

Крім ортогонального проектування існують центральний, косокутний і інший види проектування. У даному курсі лекцій використовується тільки ортогональне проектування, тому надалі вид проектування вказувати не будемо.

2. КОМПЛЕКСНЕ КРЕСЛЕННЯ

Зображення фігури, отримане при проектуванні фігури на площину, надає інформацію про фігуру. Але ця інформація є неповною. За зображенням на площині не можна відтворити фігуру і її положення у просторі, тобто креслення, що містить одну проекцію фігури, необоротне. Дійсно, за проекцією $\mathbf{A_1}$ (рис. 1.6) знайти точку **A** в просторі неможливо, тому що за проекцією не можна знайти відстань точки **A** до площини $\mathbf{П_1}$. За проекцією відрізка **CD** (точка $\mathbf{C_1 = D_1}$) знайти довжину цього відрізка неможна. Одним з методів, що дозволяють домогтися оборотності креслення, є збільшення числа площин проекцій.

2.1. Комплексне креслення точки

Розглянемо проектування точки на три й дві площини проекцій. У просторі задамо прямокутний паралелепіпед $\mathbf{AA_2Az_3A_1AxOAy}$ (рис. 1.9).

Властивості цієї фігури відомі з курсу геометрії середньої школи: ребра, що виходять з однієї вершини, перпендикулярні одне одному; кожна грань - прямокутник; будь-яке ребро паралельне трьом ребрам і перпендикулярне восьми ребрам; паралельні ребра мають однакову довжину.

Через ребра, що виходять з вершини **О**, проведемо осі **X, Y, Z** (рис. 1.10). Система **OXYZ** є декартовою системою координат (осі перпендикулярні, одиниця виміру однакова по всіх осях, точка **О** - початок координат).

Через грані, що проходять через точку **О**, проведемо площини **$П_1$, $П_2$, $П_3$** (рис.1.11). Тоді осі **X** і **Y** належать площині **$П_1$** (горизонтальна площина проекцій), осі **X** і **Z** належать **$П_2$** (фронтальна площина проекцій), осі **Y** і **Z** належать **$П_3$** (профільна площина проекцій). Простір ділиться площинами проекцій **$П_1$**, **$П_2$** і **$П_3$** на вісім частин - октантів. Номери їх показані на рис. 1.11.

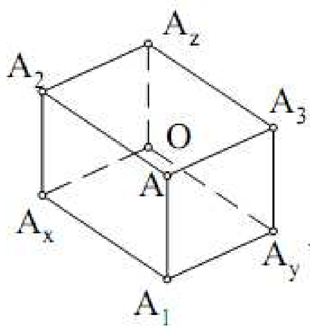


Рис. 1.9

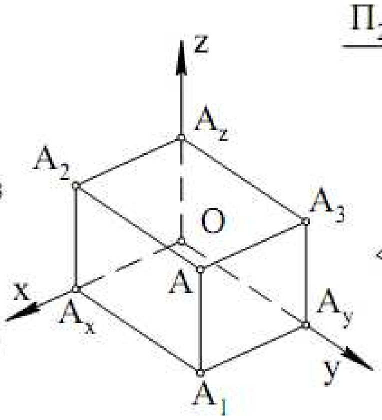


Рис. 1.10

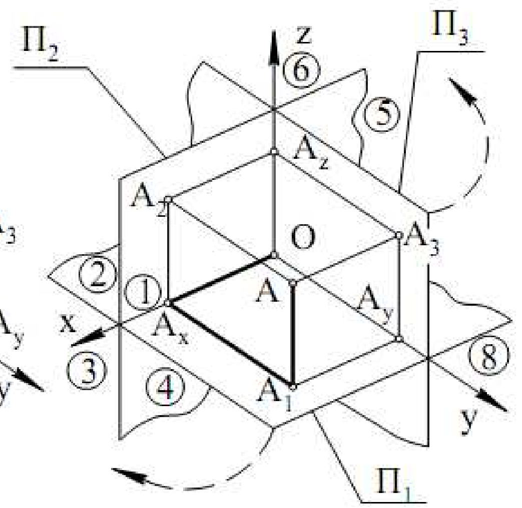


Рис. 1.11

Нехай точка **А** є точкою простору, для якої ми хочемо побудувати комплексне креслення. Тоді, ортогонально проектуючи точку **А** на **$П_1$**, одержимо точку **A_1**. Дійсно, точка **A_1** належить **$П_1$**, ребро **AA_1** перпендикулярне до площини **$П_1$**, тобто **A_1** - ортогональна проекція точки **А** на площину **$П_1$**. Точка **A_1** - горизонтальна проекція точки **А**. Ортогонально проектуючи точку **А** на **$П_2$**, одержимо **A_2** (фронтальна проекція точки **А**), ортогонально проектуючи точку **А** на **$П_3$**, одержимо **A_3** (профільна проекція точки **А**). Доказ такий же, як і для проекції **A_1**. Звернемо увагу на те, що при проектуванні точки на дві площини проекцій фігура **AA_1Ax_2** - прямокутник, площина якого перпендикулярна до осі **OX**.

Безрозмірне число, за абсолютною величиною рівне відстані від точки **А** до площини проекцій і взяте зі знаком, називається **координатою точки**. Так, наприклад, координата **X** (вимірюється уздовж осі **X**) за абсолютною величиною дорівнює довжині відрізка **A_3A** і позитивна, якщо точка **А** перебуває в тому ж півпросторі щодо площини **$П_3$**, що й позитивна піввісь осі **X**. У противному разі координата негативна. Всі ребра паралелепіпеда, паралельні й рівні **A_3A**, будемо називати координатними відрізками **X**. Це відрізки **A_3A**, **AyA_1**, **OA_x**, **A_zA_2**. Довжини цих відрізків, узяті зі знаком, є координатою **xA** точки **А**. Аналогічно вводяться й координатні відрізки **yA** і **zA**. Координатні відрізки **yA**: A_2A; A_xA_1; OA_y; A_zA_3. Координатні відрізки **zA**: A_1A; A_yA_3; OA_z; A_xA_2. Нагадаємо, що ламана OA_xA_1A називається **координатною ламаною**.

Її ланки - координатні відрізки **xA**, **yA**, **zA**. Запис B(3; 2; 5) означає, що координата **xB** = 3, координата **yB** = 2, координата **zB** = 5.

Будемо розглядати тільки ті точки і лінії, що розташовані в площинах проекцій і виконаємо повороти площин $П_1$ і $П_3$ навколо осей **X** і **Y** відповідно до сполучення із площиною $П_2$. Напрямки поворотів на рис. 1.11 показані штриховими лініями. Площина $П_2$ є площиною креслення.

Після повороту осі координат займуть положення, показане на рис. 1.12.

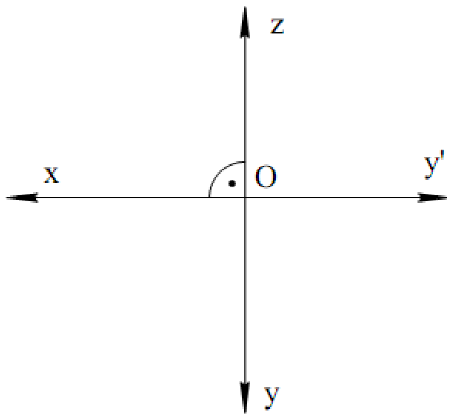


Рис. 1.12

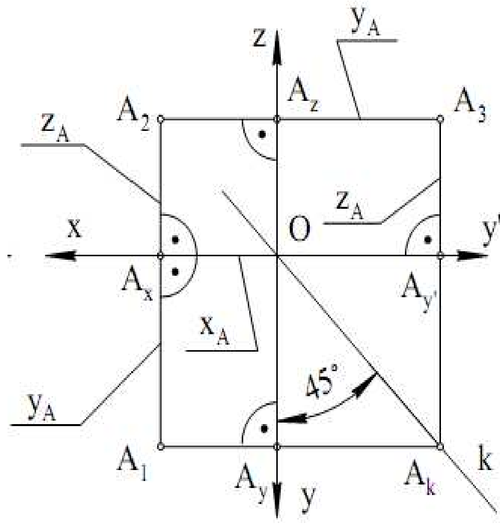


Рис. 1.13

Вісь **Y**, рухаючись із площиною $П_1$, попадає на вісь **Z**, а рухаючись із площиною $П_3$, попадає на вісь **X**. Це друге положення осі у позначимо **Y’**. Добудовуючи ребра паралелепіпеда, розташовані в площинах проекцій, одержимо рис. 1.13.

Оскільки ребра паралелепіпеда, що проходять через вершину A_x, взаємно перпендикулярні, то одержимо, що A_2A_x і A_xA_1 розташовані на одній прямій, перпендикулярній до осі **X**. Аналогічно відрізки A_2A_z і A_zA_3 розташовані на одній прямій, перпендикулярній до осі **Z**. Прямі (A_1A_2) і (A_2A_3) називаються **лініями проекційного зв’язку** (іноді під лініями проекційного зв’язку розуміють відповідні відрізки цих прямих).

На рис. 1.13 позначені координатні відрізки **xA**, **yA**, **zA**. Для того щоб забезпечити лінійний зв’язок між A_1 і A_3, введемо пряму **k** (постійна пряма креслення). Ламану A_1AkA_3 (або дві пересічні прямі A_1A_k і A_kA_3) будемо вважати лінією проекційного зв’язку для A_1 і A_3.

Таким чином, точці **A** простору відповідає зображення на площині, що складається із трьох проекцій A_1, A_2, A_3, зв’язаних між собою лініями проекційного зв’язку, що називається комплексним кресленням точки **A** у системі ($П_1П_2П_3$). Це креслення оборотне, тому що на ньому присутні всі три координатних відрізки, що встановлює взаємно однозначну відповідність між точками простору і їхніми зображеннями на площині.

У курсі креслення при зображенні предметів на кресленні, горизонтальна проекція називається **видом зверху**, фронтальна - **видом спереду**, профільна - **видом ліворуч**.

Якщо відомі A_1 і A_2, то A_3 можна побудувати. Досить провести через A_2 лінію проекційного зв'язку перпендикулярно до осі **Z** і через A_1 - ламану лінію проекційного зв'язку. Перетин цих ліній і буде точкою A_3. Крім того, на кресленні, що містить тільки A_1 і A_2, присутні всі координатні відрізки, тобто таке креслення теж оборотне. Зображення точки **A**, що складається із проекцій A_1 і A_2, зв'язаних між собою лінією проекційного зв'язку, називається **комплексним кресленням точки A** в системі ($\Pi_1\Pi_2$) або **комплексним кресленням.**

При одержанні такого креслення площина Π_3 не вводиться. Простір двома площинами Π_1 і Π_2 ділиться на чотири частини - чверті. Номери чвертей збігаються з номерами перших чотирьох октантів.

Для побудови комплексного креслення точки **A** (**xA, yA, zA**) необхідно побудувати по координатах A_1(**xA, yA**) і A_2(**xA, zA**). Якщо розглядається комплексне креслення в системі ($\Pi_1\Pi_2\Pi_3$), то можна по координатах побудувати A_3(**yA, zA**), при цьому використовується вісь **Y'**. Можна A_3 побудувати і по лініях проекційного зв'язку. При відкладанні координатних відрізків на негативних півосях необхідно звернути увагу на те, що негативні півосі одних осей збігаються з позитивними півосями інших осей.

На рис. 1.14 наведені комплексні креслення в системі ($\Pi_1\Pi_2\Pi_3$) точок **A**(3; 4; 2) і **B**(2; 3; -2), **C**(-1; 0; 3). Одиниця виміру позначена штрихами на координатних відрізках. Точка **A** перебуває в першому октанті, точка **B** - у четвертому октанті, точка **C** належить площині Π_2. Про точку **C** можна сказати, що вона належить п'ятому й шостому октантам одночасно. На рис. 1.15 наведені комплексні креслення в системі ($\Pi_1\Pi_2$) точок **К**(4; 2; 2) і **L**(5; -3; 4), **M**(6; -2; -3), **N**(1; 3; -5), **F**(-2; 3; 4). Точки **К** і **F** перебувають у першій чверті, точка **L** - у другій, точка **M** - у третій, точка **N** - у четвертій чверті.

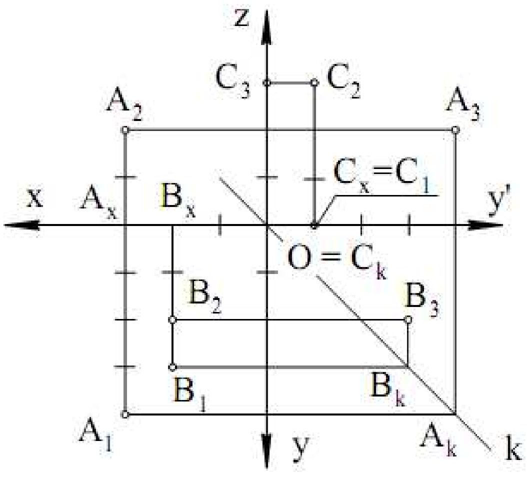


Рис. 1.14

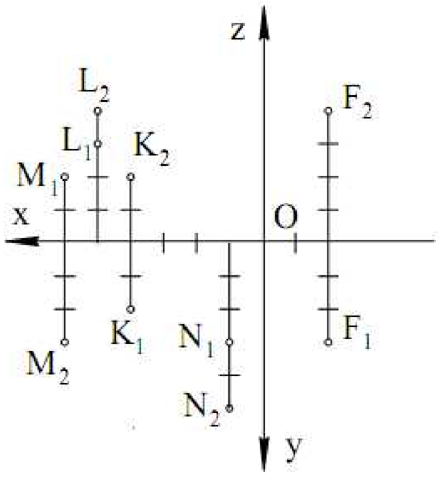


Рис. 1.15

Приналежність точки певної чверті або октанту можна виявити по знаках координат **X**, **Y**, **Z** цієї точки. Для точок кожної чверті або октанта характерні

певні знаки координат. Можна представити координатні площини, осі координат (рис. 1.11) і подумки побудувати координатну ламану точки (**OA_xA_1A** на рис. 1.11) і побачити в якій чверті або октанті перебуває точка.
Знаки координат **X, Y, Z** в октантах: 1(+; +; +); 2(+; –; +); 3(+; –; –); 4(+; +; –) 5(–; +; +); 6(–; –; +); 7(–; –; –); 8(–; +; –).
Знаки координат у чвертях: 1(±; +; +); 2(±; –; +); 3(±; –; –); 4(±; +; –).
Надалі розглядаються комплексні креслення фігур у системі (**$П_1П_2$**). Одиниця виміру по всіх осях однакова - один міліметр і спеціально позначатися штрихами не буде.

2.2. Комплексне креслення прямої

Пряма, не паралельна ні одній із площин проекцій, називається **прямою загального положення**. Пряма, паралельна хоча б одній із площин проекцій, називається **прямою окремого положення**.
Провести пряму на кресленні неможливо, тому що вона необмежена й не має певної довжини. Звичайно пряма задається на кресленні відрізком і передбачається, що відрізок при необхідності можна продовжити.

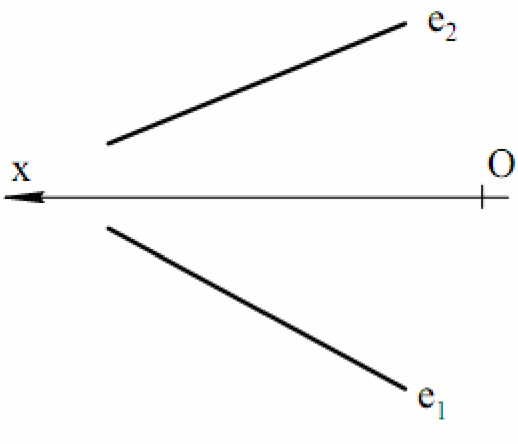


Рис. 1.16

При проектуванні прямої е на горизонтальну площину проекцій **$П_1$** одержимо пряму **e_1**, при проектуванні прямої **e** на фронтальну площину проекцій **$П_2$** одержимо пряму **e_2**. Пряма **e_1** - це горизонтальна проекція прямої **e**, пряма **e_2** - фронтальна проекція прямої **e** (рис. 1.16).
Умовимося, на комплексному кресленні в системі (**$П_1$ $П_2$**), осі **Y** і **Z** не показувати. Запис **e (e_1, e_2)** означає, що пряма **e** на кресленні задана проекціями **e_1** і **e_2**. Такий запис використовується не тільки для прямої, але й для будь-якої фігури. Пряма **e** є прямою загального положення. Переконаємося в цьому, розглянувши комплексні креслення прямих окремого положення (рис. 1.17).
Пряма **h**, паралельна горизонтальній площині проекцій **$П_1$**, називається **горизонталлю.** Відстані від кожної точки горизонталі **h** до **$П_1$** однакові, тому що **$h \parallel П_1$**. Ці відстані присутні на фронтальній площині проекцій (координатні відрізки **Z** для кожної точки прямої). Тому фронтальна проекція горизонталі паралельна осі **X**, тобто **$h_2 \parallel X$** .

Пряма **f**, паралельна фронтальній площині проекцій **$П_2$**, називається **фронталлю**. Відстані від кожної точки **f** до **$П_2$** однакові. Ці відстані присутні на горизонтальній площині проекцій (координатні відрізки **Y** для кожної точки прямої). Тому **$f_1 \parallel x$** .

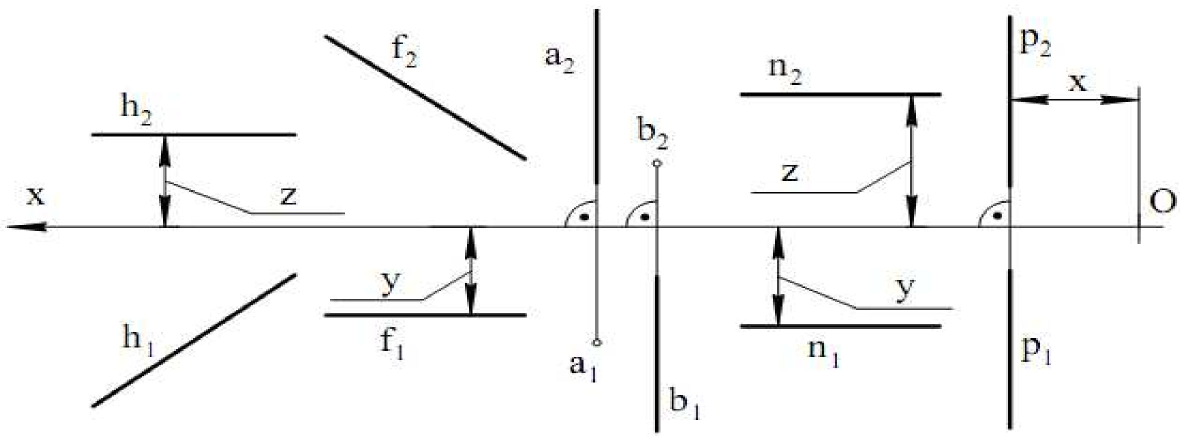


Рис. 1.17

Пряма **a**, перпендикулярна до горизонтальної площини проекцій $\mathbf{П_1}$, називається **горизонтально - проектуючою** прямою. На $\mathbf{П_1}$ вона проектується в точку.

Тому що пряма **a** паралельна осі **Z** , то $\mathbf{a_2}$ паралельна осі **Z** на $\mathbf{П_2}$. Пряма **a** не тільки горизонтально - проетуюча пряма, але також є фронталлю, тому що $\mathbf{a \parallel П_2}$.

Пряма **b**, перпендикулярна до фронтальної площини проекцій $\mathbf{П_2}$, називається **фронтально - проектуючою** прямою. На $\mathbf{П_2}$ вона проектується в точку. Пряма **b** також є горизонталлю.

Прямі, паралельні площинам проекцій, називаються **прямими рівня**, або **лініями рівня**. Пряма **n**, паралельна $\mathbf{П_1}$ і $\mathbf{П_2}$, може бути названа прямою подвійного рівня ($\mathbf{n_1 \parallel x, n_2 \parallel x}$), крім того **n** паралельна осі **X**.

На комплексному кресленні в системі ($\mathbf{П_1\ П_2\ П_3}$) прямими окремого положення, крім розглянутих вище прямих, будуть прямі паралельні площині $\mathbf{П_3}$ **-профільні прямі**. На рис. 1.17 показані проекції $\mathbf{p_1}$ і $\mathbf{p_2}$ профільної прямої, у точок цієї прямої однакові координатні відрізки **X**.

При побудові на комплексному кресленні профільної прямої необхідно задавати профільну проекцію цієї прямої. Помітно, що пряма **n** на комплексному кресленні в системі ($\mathbf{П_1П_2П_3}$) називається **профільно - проектуючою прямою**, її проекцією на $\mathbf{П_3}$ буде точка.

Комплексні креслення прямих окремого положення мають яскраво виражені особливості - у прямих рівня є проекція, паралельна осі координат, у проектуючих прямих одна із проекцій - точка. Пряма **e** (рис. 1.16) не має цієї особливості, тому є прямою **загального положення**.

Оскільки через дві точки проходить єдина пряма, то пряму можна задати двома точками. Від такого задання прямої легко перейти до задання прямої відрізком. Дійсно, з'єднавши по лінійці горизонтальні проекції точок, одержимо горизонтальну проекцію відрізка, з'єднавши фронтальні проекції точок, одержимо фронтальну проекцію відрізка. Якщо дані горизонтальна й фронтальна проекції прямої, то для того, щоб побудувати профільну проекцію прямої, необхідно побудувати профільні проекції двох будь-яких точок цієї прямої і провести через них профільну проекцію прямої (точніше, профільну проекцію відрізка, що задає пряму).

Звернемо увагу на одну властивість ліній рівня. Відрізок, розташований на лінії рівня, проектується в рівний йому відрізок на ту площину проекцій, якій **паралельна** лінія рівня. Наприклад, відрізок на горизонталі проектується на горизонтальну площину проекцій у рівний йому відрізок, тобто в натуральну величину (рис. 1.2, $\alpha = 0$).

2.3. Комплексне креслення площини

Площина, не перпендикулярна до жодної з площин проекцій, називається площиною **загального положення**. Площина, перпендикулярна хоча б до однієї із площин проекцій, називається площиною **окремого положення.**

Побудувати комплексне креслення всіх точок площини неможливо, тому що множина точок площини нескінченна й необмежена (відстань між двома точками площини може приймати які завгодно більші значення). Для того щоб побудувати комплексне креслення площини, зробимо так само, як зробили при побудові комплексного креслення прямої. Будемо будувати комплексне креслення частини площини. Звичайно, будь-яка частина (шматок) площини задасть площину на кресленні, але найбільше простою і зручною частиною площини для цієї мети є трикутник.

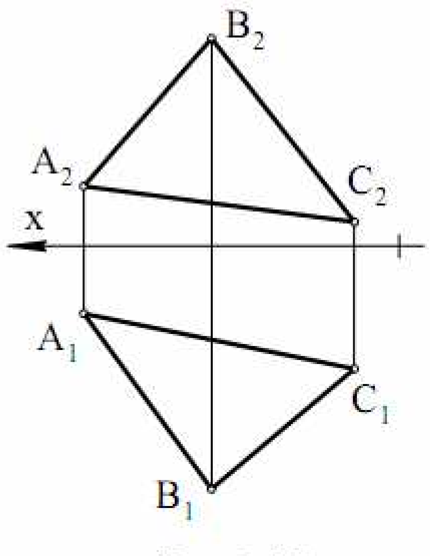


Рис. 1.18

Нехай у площині **Σ** взято трикутник **ABC**.

При проектуванні **ΔABC** на $\mathbf{П_1}$ одержимо $\mathbf{ΔA_1У_1C_1}$, при проектуванні на $\mathbf{П_2}$ - $\mathbf{ΔA_2У_2C_2}$ (рис. 1.18).

Можна сказати, що спочатку побудували комплексне креслення вершин трикутника, а потім однойменні проекції вершин з'єднали відрізками, які є проекціями сторін трикутника. При цьому лінії проекційного зв'язку ($\mathbf{A_1A_2}$), ($\mathbf{B_1У_2}$), ($\mathbf{C_1C_2}$) перпендикулярні до осі **X**. Таким чином, на рис. 1.18 наведене комплексне креслення площини **Σ**, заданої трикутником **ΔABC**. Для площини **Σ**, заданої трикутником **ΔABC**, будемо використовувати позначення: **Σ**; **Σ**(**ΔABC**); **(ΔABC)**. Площина **Σ** (рис. 1.18) є площиною **загального положення**. Переконаємося у цьому, розглянувши комплексні креслення площин окремого положення (рис. 1.19).

Площина **Г** (**Δ DFE**), перпендикулярна до горизонтальної площини проекцій $\mathbf{П_1}$, називається **горизонтально - проектуючою площиною**. На $\mathbf{П_1}$ площину **Г** проектується в пряму лінію, що є лінією перетину **Г** і $\mathbf{П_1}$

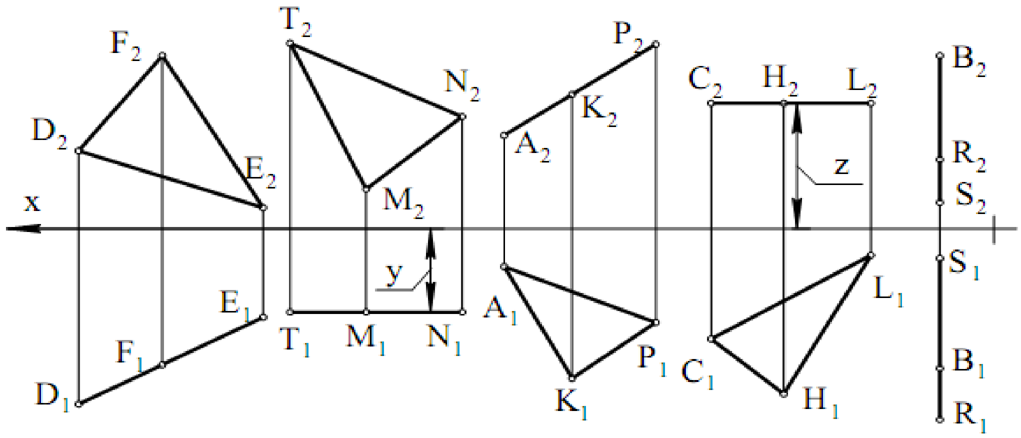


Рис. 1.19

Для будь-якої точки площини **Г** пряма, що проектує цю точку на $\mathbf{П_1}$, перебуває в площині **Г**. Всі точки площини **Г** проектуються на лінію перетину **Г** і $\mathbf{П_1}$. Трикутник **DFE** на $\mathbf{П_1}$ проектується у відрізок, а на $\mathbf{П_2}$ - у трикутник. Відрізок на $\mathbf{П_1}$ задає пряму, в яку проектується площина **Г**.

Площина **(**Δ **TNM**) теж горизонтально - проектуюча, тому що її горизонтальна проекція – пряма, задана відрізком $\mathbf{T_1M_1}$. Відрізок $\mathbf{T_1M_1}$ паралельний осі **X**. Це значить, що у всіх точок площини (Δ**TNM**) координата **Y** однакова, тобто площина паралельна фронтальній площині проекцій $\mathbf{П_1}$. Така площина називається **фронтальною площиною рівня,** або **фронтальною площиною.**

Площина (**AKF**) перпендикулярна до $\mathbf{П_2}$ і називається **фронтально - проектуючою площиною**. На фронтальну площину проекцій ця площина проектується в пряму, задану відрізком $\mathbf{A_2P_2}$. Фронтально - проектуюча площина (Δ**CHL**) паралельна горизонтальній площині проекцій, тому що координата **Z** у всіх точок цієї площини однакова ($\mathbf{C_2L_2} \parallel \mathbf{x}$). Така площина називається **горизонтальною площиною рівня,** або **горизонтальною площиною.**

Площина (Δ**BRC**) перпендикулярна до $\mathbf{П_1}$ і $\mathbf{П_2}$, ця площина перпендикулярна осі **X**. У системі ($\mathbf{П_1П_2П_3}$) вона називається **профільною площиною рівня**, або **профільною площиною**, тому що (Δ**BRC**) $\parallel$ $\mathbf{П_3}$ (координата **X** всіх точок площини однакова).

У системі ($\mathbf{П_1П_2П_3}$), площина, перпендикулярна до профільної площини проекцій $\mathbf{П_3}$, називається **профільно - проектуючою** площиною. Профільна проекція такої площини - пряма.

У площин окремого положення хоча б одна проекція - пряма лінія.

Площина **Σ** (рис. 1.18) не має цієї особливості, тому є площиною **загального** положення.

Площина може бути задана не тільки трикутником (рис.1.20). Для завдання площини можна використати **три точки** (1, рис.1.20), **дві паралельні прямі** (4, рис.1.20), **дві пересічні прямі** (3, рис.1.20), **точку й пряму** (2, рис.1.20), будь-якою **плоскою геометричною фігурою** (5, рис.1.20),

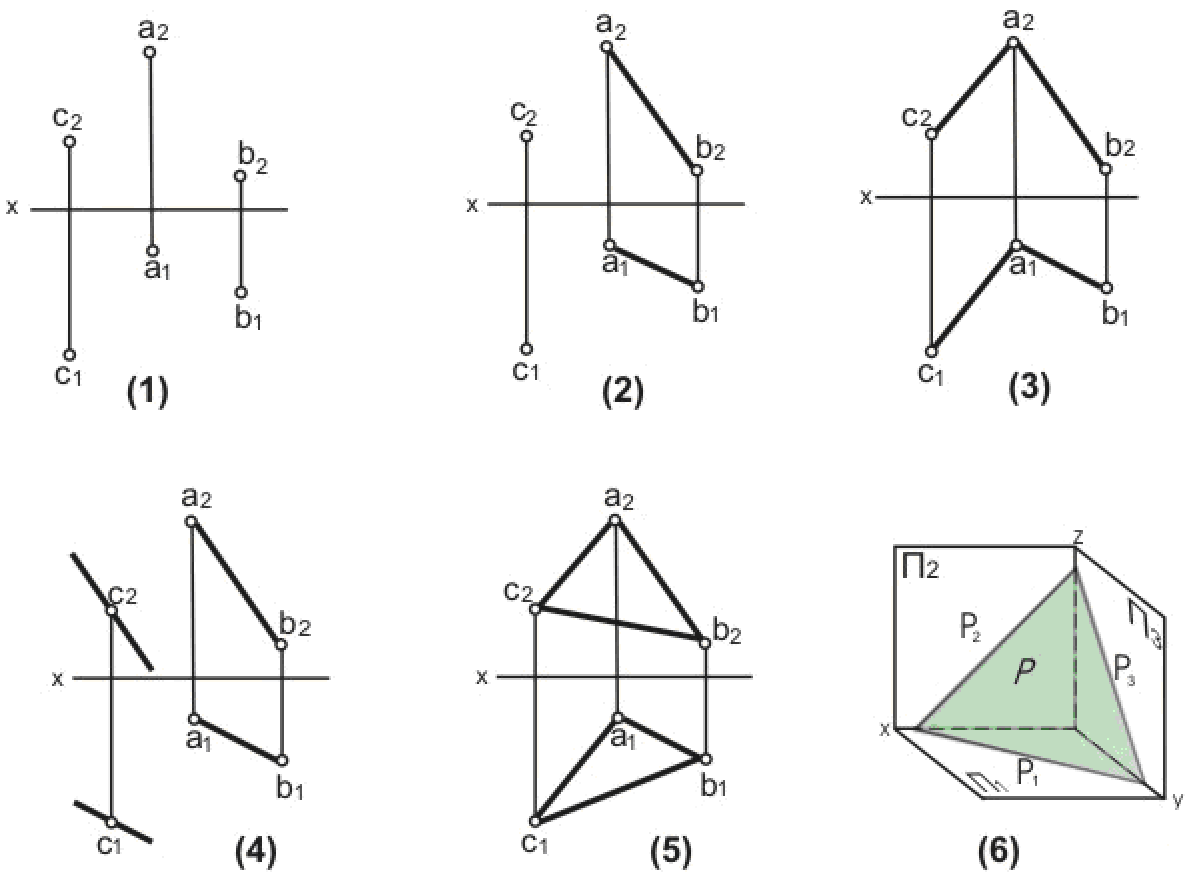


Рис. 1.20

слідами (6, рис.1.20), тому що через кожну з цих фігур проходить єдина площина. Звичайно, розглядати таку фігуру як частину площини вже не можна. Від одного способу задання площини можна перейти до будь-якому іншого. Наприклад, якщо площина задана паралельними прямими, те, взявши на одній прямій дві точки, а на іншій прямій - одну точку й з'єднавши ці точки відрізками, перейдемо до задання площини трикутником.

Для того щоб від комплексного креслення площини в системі (**$\Pi_1\Pi_2$**) перейти до комплексного креслення площини в системі (**$\Pi_1\Pi_2\Pi_3$**), треба побудувати профільну проекцію фігури, що задає площину.

ЛЕКЦІЯ № 2. ВЗАЄМНЕ ПОЛОЖЕННЯ ТОЧОК І ПРЯМИХ, ЇХНЯ ПРИНАЛЕЖНІСТЬ ПЛОЩИНІ. ПЕРША І ДРУГА ПОЗИЦІЙНІ ЗАДАЧІ.

1. ВЗАЄМНЕ ПОЛОЖЕННЯ ТОЧОК І ПРЯМИХ, ЇХНЯ ПРИНАЛЕЖНІСТЬ ПЛОЩИНІ.

1.1. Взаємне положення точки й прямої. Ділення відрізка прямої в даному відношенні

Точка може належати прямій і може не належати прямій. Нехай точка **A** належить прямій **e** (**A** $\in$ **e**). При проектуванні прямої і точки на площину $\mathbf{\Pi_1}$ одержимо, що горизонтальна проекція точки належить горизонтальній проекції прямої $\mathbf{A_1} \in \mathbf{e_1}$. Аналогічно і при проектуванні на $\mathbf{\Pi_2}$ - $\mathbf{A_2} \in \mathbf{e_2}$.

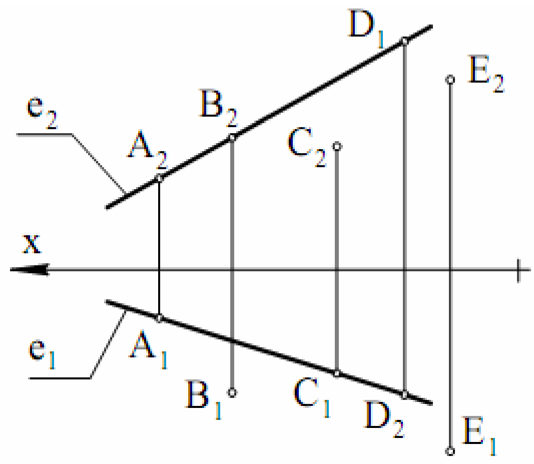


Рис. 2.1

Таким чином, **якщо точка належить прямій, те її проекції належать однойменним проекціям прямої.** Справедливо і зворотне твердження: якщо проекції точки належать однойменним проекціям прямої, то точка належить прямій. На рис. 2.1 точка A належить прямій **e**, а інші точки не належать прямій **e**.

Для визначення приналежності точки профільній прямій необхідні профільні проекції точки й прямої.

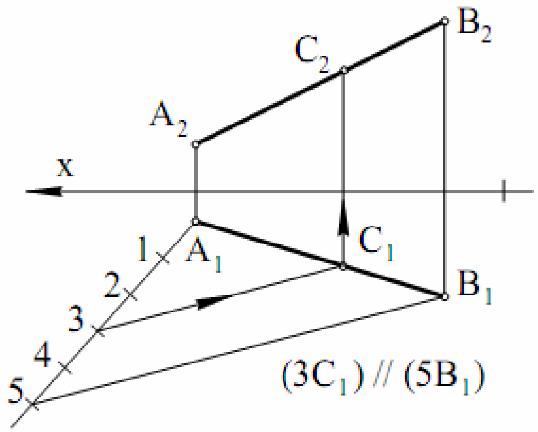


Рис. 2.2

При проектуванні відрізка **AB** на $\mathbf{\Pi_1}$ одержимо відрізок $\mathbf{A_1B_1}$, при проектуванні на $\mathbf{\Pi_2}$ - $\mathbf{A_2B_2}$. На рис. 2.2 показане комплексне креслення відрізка **AB**.

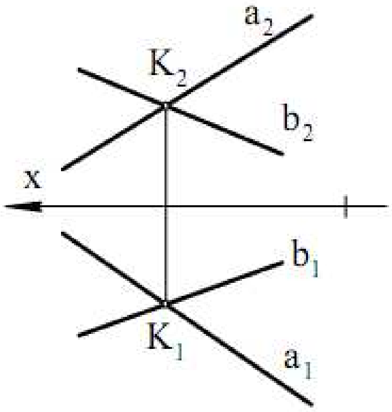
Оскільки відношення довжин відрізків, що лежать на одній прямій, при проектуванні не міняється, то для ділення відрізка в даному відношенні досить розділити щодо цього одну проекцію відрізка, і це повністю визначить точку ділення. На рис. 2.2 показана побудова точки **C**, що ділить відрізок **AB** у відношенні $|\mathbf{AC}| : |\mathbf{CB}| = 3:2$. На основі теореми Фалеса у відношенні 3:2 ділимо горизонтальну проекцію відрізка, тобто $|\mathbf{A_1C_1}| : |\mathbf{C_1\ B_1}| = 3:2$. Так знаходимо точку $\mathbf{C_1}$. Потім по лінії проекційного зв'язку знаходимо $\mathbf{C_2}$.

Точка C_2 ділить фронтальну проекцію відрізка в тому ж відношенні $|A_2C_2| : |C_2 B_2| = 3:2$ (за теоремою Фалеса, тому що лінії проекційного зв'язку всіх точок паралельні). На рис. 2.2 послідовність побудов показана стрілкою на лінії проекційного зв'язку - спочатку будується C_1, а потім C_2.

1.2. Взаємне положення прямих

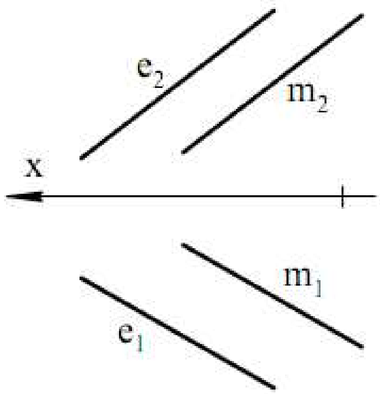
У просторі дві прямі можуть збігатися, перетинатися, бути паралельними, мимобіжними.

У прямих, що збіглися, всі точки збігаються, тому ці прямі матимуть однойменні проекції, що збіглися. По суті, це одна пряма, позначена по-різному.



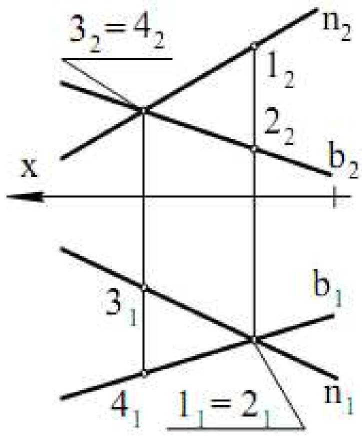
$a \cap b = K$

Рис.2.3



$e \,//\, m$

Рис.2.4



$n \dot{-} b$

Рис.2.5

Пересічні прямі мають одну загальну точку. Нехай прямі загального положення **a** і **b** перетинаються в точці **K** ($a \cap b = K$). Пересічні прямі в загальному випадку проектуються в пересічні прямі. Точка **K** - реально існуюча точка, і її проекції перебувають на лінії проекційного зв'язку (K_1K_2), перпендикулярної осі **X** (рис. 2.3).

Паралельні прямі розташовані в одній площині і не мають загальних точок. Паралельні прямі в загальному випадку проектуються в паралельні прямі (п'ята властивість ортогонального проектування). На рис. 2.4 показане комплексне креслення паралельних прямих **e** і **m**. При проектуванні цих прямих на Π_1 одержимо $e_1 \parallel m_1$, при проектуванні на Π_2 – $e_2 \parallel m_2$.

Прямі, що не лежать в одній площині, називаються **мимобіжними**. Ці прямі не паралельні і не перетинаються. Приклад комплексного креслення мимобіжних прямих **n** і **b** показаний на рис. 3.5 ($n \dot{-} b$). Горизонтальні й фронтальні проекції цих прямих перетинаються. Але точки їхнього перетину не лежать на одній лінії проекційного зв'язку. У точці перетину горизонтальних проекцій збіглися проекції двох точок $1 \equiv$ **n** і $2 \equiv$ **b**. Це горизонтально конкуруючі точки. Координати **X** і **Y** цих точок рівні, а координата **Z** точки 1 більше, ніж **Z** точки 2. У точки перетину фронтальних проекцій цих прямих збіглися проекції двох точок 3 ≡ **n** і 4 ≡ **b**. Це фронтально конкуруючі точки. Координати **X** і **Z** цих точок рівні, а координата **Y** точки 4 більше, ніж у точки 3. Мимобіжні прямі можуть проектуватися на одну площину проекцій у паралельні прямі, а на іншу площину проекцій – у пересічні прямі.

Якщо хоча б одна з прямих є профільною прямою, то для визначення взаємного положення прямих потрібно побудувати профільні проекції цих прямих.

При розгляді комплексних креслень будь-яких фігур необхідно подумки представляти ці фігури в просторі і їхнє положення щодо площин проекцій.

1.3. Приналежність точки й прямої площині

Точка належить площині, якщо вона належить якій-небудь прямій цієї площини.

Пряма належить площині, якщо дві її точки належать площині.

Ці дві цілком очевидних пропозиції часто називають умовами приналежності точки й прямої площині.

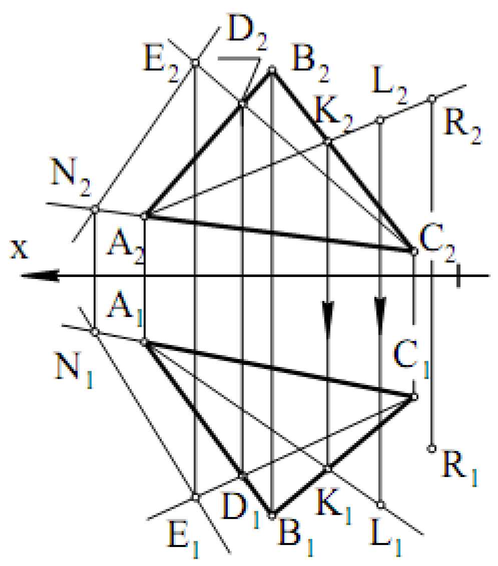


Рис. 2.6

На рис. 2.6 площина загального положення задана трикутником **ABC**. Точки **A, B, C** належать цій площині, тому що є вершинами трикутника із цієї площини. Прямі (**AB**), (**BP**), (**AC**) належать площині, тому що по дві їх точки належать площині. Точка **N** належить (**AC**), **D** належить (**AB**), **E** належить (**CD**) і, виходить, точки **N** та **E** належать площині (**ΔABC**), тоді пряма (**NE**) належить площині (**ΔABC**).

Якщо задано одну проекцію точки **L**, наприклад $\mathbf{L_2}$, і відомо, що точка **L** належить площині (**ΔABC**), то для знаходження другої проекції $\mathbf{L_1}$ послідовно знаходимо ($\mathbf{A_2L_2}$), $\mathbf{K_2}$, ($\mathbf{A_1K_1}$), $\mathbf{L_1}$.

Якщо умова приналежності точки площині порушена, то точка не належить площини. На рис. 2.6 точка **R** не належить площині (**ΔABC**), тому що $\mathbf{R_2}$ належить ($\mathbf{F_2K_2}$), а $\mathbf{R_1}$ не належить ($\mathbf{A_1K_1}$).

На рис. 2.7 наведене комплексне креслення горизонтально - проектуючої площини (**ΔCDE**). Точки **K** і **P** належать цій площині, тому що $\mathbf{P_1}$ і $\mathbf{K_1}$ належать прямій ($\mathbf{D_1C_1}$), що є горизонтальною проекцією площини (**ΔCDE**). Точка **N** не належить площині, тому що $\mathbf{N_1}$ не належить ($\mathbf{D_1C_1}$). Всі точки площини (**ΔCDE**) проектуються на $\mathbf{\Pi_1}$ у пряму ($\mathbf{D_1C_1}$). Це випливає з того, що площина (**ΔCDE**) ⊥ $\mathbf{\Pi_1}$. У цьому ж можна переконатися, якщо виконати для точки **P** (або будь-якої іншої точки) побудови, які були зроблені для точки **L** (рис. 2.6). Точка $\mathbf{P_1}$ потрапить на пряму ($\mathbf{D_1C_1}$). Таким чином, для того, щоб визначити приналежність точки горизонтально проектуючій площині, фронтальна проекція ($\Delta\mathbf{C_2D_2E_2}$) не потрібна. Тому що надалі проектуючі площини будуть задаватися тільки однією проекцією (прямою лінією). На рис. 2.7 показана фронтально - проектуюча площина **Σ**,яка задана фронтальною проекцією $\mathbf{\Sigma_2}$, а також точки $\mathbf{A} \in \mathbf{\Sigma}$ і $\mathbf{B} \notin \mathbf{\Sigma}$.

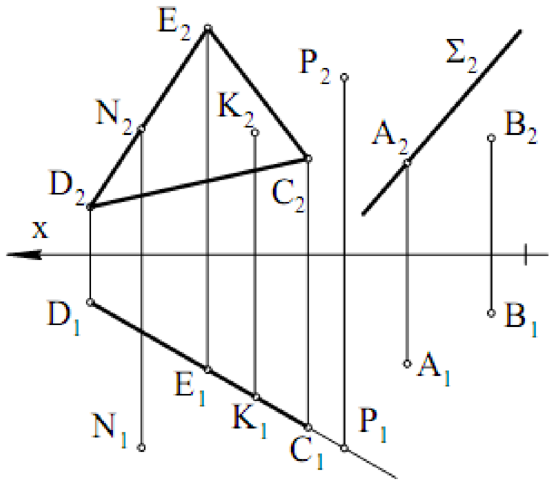


Рис. 2.7

Взаємне положення точки й площини зводиться до приналежності або не приналежності точки площині.

При вирішенні багатьох задач доводиться будувати лінії рівня, що належать площинам загального й окремого положення. На рис. 2.8 показані горизонталь **h** і фронталь **f**, що належать площині загального положення (Δ**ABC**). Фронтальна проекція $\mathbf{h_2}$ паралельна осі **X**, тому пряма **h** - горизонталь. Точки 1 і 2 прямої **h** належать площині, тому пряма **h** належить площині.

Таким чином, пряма **h** - це горизонталь площини (Δ**ABC**). Звичайно порядок побудови такий: $\mathbf{h_2}$; 1_2, 2_2; 1_1, 2_1; $(1_1 2_1) = \mathbf{h_1}$. Фронталь **f** проведена через точку **A**.

Порядок побудови: $\mathbf{f_1} \parallel \mathbf{x}$, $\mathbf{A_1} \in \mathbf{f_1}$; 3_1, 3_2; $(\mathbf{A_2}3_2) = \mathbf{f_2}$.

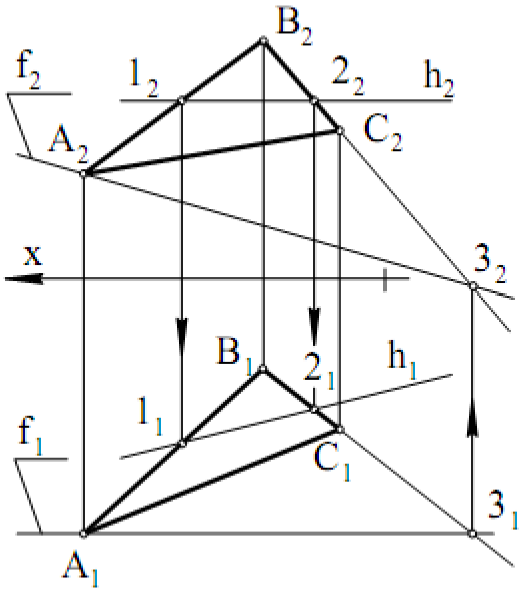


Рис. 2.8

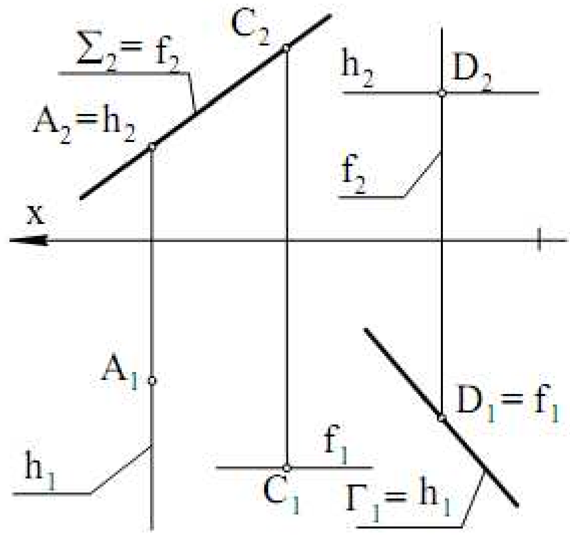


Рис. 2.9

На рис. 2.9 показані проекції горизонталі й фронталі для фронтально проектуючої площини **Σ** і горизонтально - проектуючої площини **Г**. У площині **Σ** горизонталь є фронтально - проектуючою прямою і проходить через точку **A** (спробуйте уявити горизонталь як лінію перетину **Σ** і площини, що проходить через точку **A** паралельно $\mathbf{П_1}$). Фронталь проходить через точку **C**. У площині **Г** горизонталь і фронталь проведені через одну точку **D**.

Фронталь є горизонтально - проектуючою прямою.

З розглянутих вище побудов виходить , що лінію рівня в площині можна провести через будь-яку точку цієї площини. Збіг площин можна трактувати як приналежність однієї площини іншій. Якщо три точки однієї площини належать іншій площині, то ці площини збігаються. Згадані три точки не повинні лежати на одній прямій.

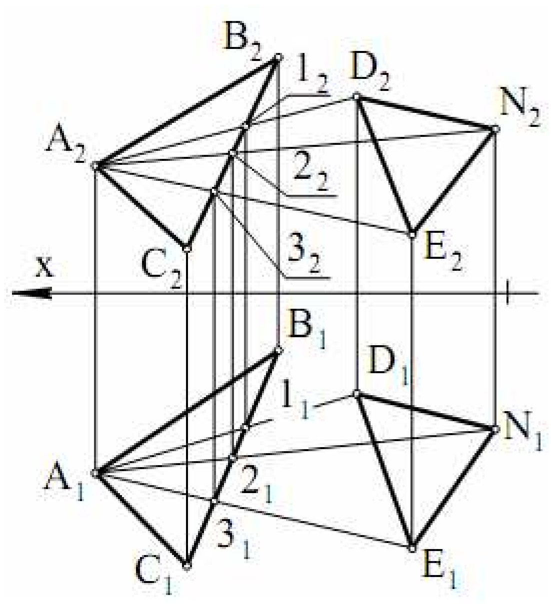


Рис. 2.10

На рис.2.10 площина (**ΔDNE**) збігається із площиною **Σ**(**ΔABC**), тому що точки **D**, **N**, **E** належать площині **Σ**(**ΔABC**).

Звернемо увагу на те, що площина **Σ**, яка задана **ΔABC**, тепер може бути задана **ΔDNE**. Будь-яка площина може бути задана лініями рівня. Для цього необхідно через точку площини **Σ**(**ΔABC**) (наприклад через точку **A**) провести в площині горизонталь і фронталь, які і будуть задавати площину **Σ** (на рис. 2.10 побудови не показані).

Послідовність побудови горизонталі: $\mathbf{h_2 \parallel x\ (A_2 \in h_2);\ K_2 = h_2 \cap B_2C_2;}$ $\mathbf{K_1 \cap B_1C_1\ (K_2K_1 \perp x);\ A_1K_1 = h_1}$.

Послідовність побудови фронталі: $\mathbf{f_1 \parallel x\ (A_1 \in f_1);\ L_1 = f_1 \cap B_1C_1;}$ $\mathbf{L_2 \cap B_2C_2\ (L_1L_2 \perp x);\ A_2L_2 = f_2}$. Можна записати $\mathbf{\Sigma(\Delta ABC) = \Sigma(h, f)}$.

2. ПЕРША І ДРУГА ПОЗИЦІЙНІ ЗАДАЧІ

Позиційні задачі - це задачі, в яких потрібно визначити положення фігури щодо площин проекцій або взаємне положення фігур - їхню приналежність, паралельність і перетин.

2.1. Взаємне положення прямої і площини

Взаємне положення прямої і площини визначається кількістю спільних точок: а) якщо пряма має дві спільні точки із площиною, то вона належить цій площині; б) якщо пряма має одну спільну точку із площиною, то пряма перетинає площину; в) якщо точка перетину прямої із площиною вилучена в нескінченність (невласна), то пряма і площина паралельні.

Пряма паралельна площині, якщо вона паралельна якій-небудь прямій, що лежить у цій площині. Щоб побудувати таку пряму, треба в площині задати пряму й паралельно їй провести потрібну пряму.

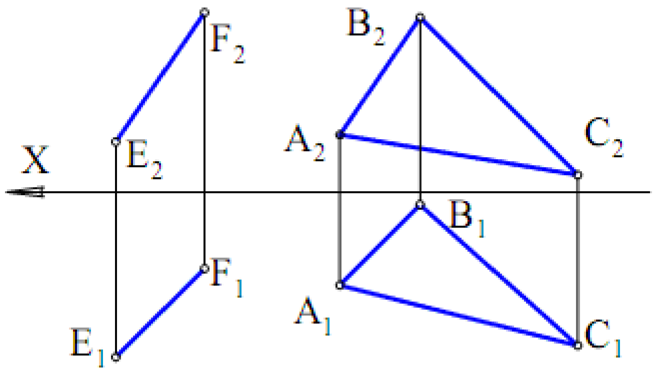


Рис. 2.11

Нехай площина задана трикутником **Σ(ΔABC)**. Через точку **E** (рис. 2.11) необхідно провести пряму EF, яка паралельна площині **Σ**. Для цього через горизонтальну проекцію точки **E(E_1)** проведемо горизонтальну проекцію **E_1F_1** шуканої прямої паралельно горизонтальній проекції будь-якої прямої, що лежить у площині **Σ**, наприклад, прямій **AB** (**$E_1F_1 \parallel A_1B_1$**).

Через фронтальну проекцію **E_2** точки **E** паралельно **AB** проводимо фронтальну проекцію **E_2F_2** шуканої прямої **EF** (**$E_2F_2 \parallel A_2B_2$**). Пряма **EF** паралельна площині **Σ**, заданої трикутником **ABC**.

Пряма буде також паралельна площині, якщо вона лежить у площині, паралельній даній.

2.2. Побудова точки перетину прямої з площиною

Задача на побудову точки перетину прямої із площиною, названа першою позиційною задачею, широко застосовується в нарисній геометрії.

Вона лежить в основі вирішення наступних задач:

• на перетин двох площин;
• перетин поверхні із площиною;
• перетин прямої з поверхнею;
• взаємний перетин поверхонь.

Побудувати точку перетину прямої з площиною - значить знайти точку, що належить одночасно заданій прямій і площині.

2.2.1. Площина займає проектуюче положення

Якщо площина займає проектуюче положення (наприклад, вона перпендикулярна до фронтальної площини проекцій, рис. 2.12), то фронтальна проекція точки перетину повинна одночасно належати фронтальному сліду площини й фронтальної проекції прямої, тобто бути в точці їхнього перетину.

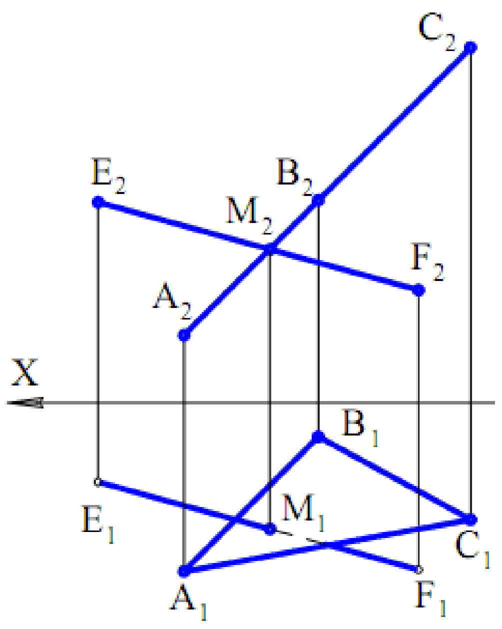


Рис. 2.12

Тому спочатку визначається фронтальна проекція $\mathbf{M_2}$ точки **M** (точка перетину прямої EF із фронтально - проектуючою площиною **Σ(ΔABC)**), а потім її горизонтальна проекція. Точка $\mathbf{M_1}$ визначена з умови приналежності точки **M** прямій **EF**.

Думаючи, що площина **Σ** являє собою непрозорий трикутник, установимо видимість проекцій відрізка прямої **EF**. На $\mathbf{П_2}$ вся проекція відрізка прямої **EF** видима, тому що він не закривається трикутником. На $\mathbf{П_1}$ ділянку відрізка прямої правіше $\mathbf{M_2}$ не бачимо, тому що він перебуває нижче площини при погляді на $\mathbf{П_1}$.

2.2.2. Пряма займає проектуюче положення

На рис. 2.13 зображена площина загального положення **P** (**ΔABC**) і горизонтально - проектуюча пряма **EF**, що перетинає площину в точці **M**.

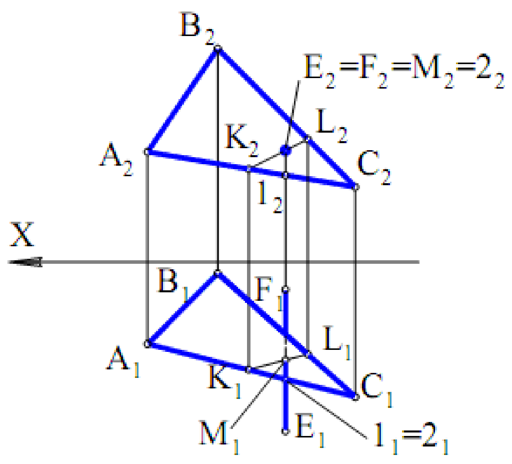


Рис. 2.13

Фронтальна проекція точки - точка $\mathbf{M_2}$ - збігається з точками $\mathbf{E_2}$ і $\mathbf{F_2}$, тому що **M** належить прямій. Для побудови горизонтальної проекції шуканої точки перетину проведемо через точку **M** у площині **P** пряму (наприклад, **KL**). Спочатку побудуємо її фронтальну проекцію, а потім - горизонтальну. Точка **M** є точкою перетину прямих **EF** і **KL**. Тому що точка **M** одночасно лежить на прямій **EF** і в площині **P** (**KL** $\in$ **P**), то вона є точкою їхнього перетину. Для встановлення видимості проекції прямої на $\mathbf{П_1}$ вводимо конкуруючі точки 1 і 2.

Оскільки точка 2 далі віддалена від площини $\mathbf{П_1}$, то відносно $\mathbf{П_1}$ вона буде видимою, а невидимою буде точка 1. Помітно, що точка 2 належить прямій **EF**. Отже, в околиці точок $1_1 \equiv 2_1$ до $\mathbf{M_1}$ проекція прямої буде видимою. Вище $\mathbf{M_1}$ проекція прямої буде невидимою. Невидима ділянка проекції прямої показана штриховою лінією.

2.3. Пряма і площина займають загальне положення

Нехай дано площину **Σ** і пряму **AB** (рис. 2.14, а). У загальному випадку вони мають одну спільну точку. Ця точка, що належить прямій і площині, буде належати і деякій прямій **n** цієї площини. Помітно, що в площині через точку можна провести однопараметричну множину прямих - ∞1. Виділивши хоча б одну з них, легко визначимо шукану точку. Отже, поставлена задача зводиться до відшукання деякої прямої **n**, що належить заданій площині і яка перетинає вихідну пряму **AB**.

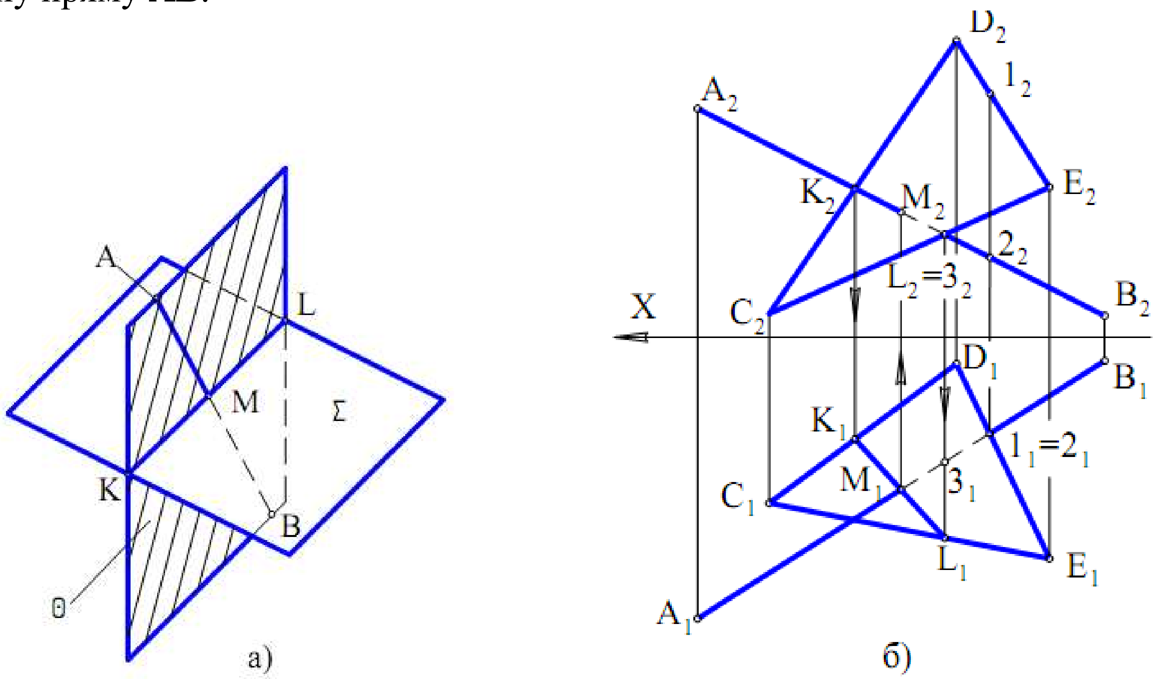


Рис.2.14

Пряму **n** можна розглядати як проекцію прямої **AB** на задану площину **Σ** (у більш широкому змісті пряма **n** є відображенням прямої **AB** на площину **Σ**). Для випадку лінійного проектування прямі **n** і **AB** належать одній площині і є конкуруючими щодо площини **Σ**. Останнє використаємо для визначення точки перетину прямої і площини. Тоді алгоритм рішення поставленої задачі буде наступним:

1) на заданій площині **Σ(ΔCDE)** проведемо проекції прямої **KL** (рис. 2.14,б), що конкурує із заданою прямою **AB** щодо площин **Σ** і $\mathbf{П_2}$; спочатку знаходимо $\mathbf{K_2L_2}$, а потім $\mathbf{K_1L_1}$; прямі **KL** і **AB** розташовані у фронтально - проектуючій площині;

2) знаходимо точки $\mathbf{M_1= K_1L_1 \cap A_1B_1}$ і $\mathbf{M_2} \in \mathbf{A_2B_2}$ перетину проекцій прямих **AB** і **KL**; точка $\mathbf{M(M_1,M_2)}$ - шукана;

3) визначаємо видимість прямої і площини відносно площин проекцій.

Для визначення видимих ділянок прямої **AB** аналізуємо положення конкуруючих точок мимобіжних прямих. Так, точки 1 і 2 перебувають на мимобіжних прямих **AB** і **DE**: 1∈ **DE**, 2∈ **AB**. Їхні горизонтальні проекції 1_1 і 2_1

збігаються. По фронтальних проекціях точок 1 і 2 при погляді на площину $\textbf{П}_1$ видно, що точка 1 (точка площини) перебуває над точкою 2 (точка прямої), тобто вона закриває точку 2 при проектуванні на горизонтальну площину проекцій. Отже, пряма **AB** на ділянці **M**-2 розташована під трикутником **CDE**. Тоді горизонтальна проекція відрізка $\mathbf{M_2}$ - $\mathbf{M_1 2_1}$ буде невидимою. Вона показана штриховою лінією.

Невидима ділянка на фронтальній проекції прямої **AB** установлена аналізом положення точок 4 і 3 ($4 \in$ **CE**, $3 \in$ **AB**), що належать мимобіжним прямим **AB** і **CE**. По горизонтальній проекції видно, що якщо дивитися на площину $\textbf{П}_2$, то невидимою буде точка 3, що належить, прямій. Вона ближче розташована до площини проекцій $\textbf{П}_2$. На фронтальній площині проекцій точка 4 закриває точку 3. У цьому місці пряма **AB** закрита трикутником **CDE**.

На $\textbf{П}_2$ невидиму ділянку $\mathbf{M_2}3_2$ показано штриховою лінією.

Задача на перетин прямої і площини загального положення може бути зведена до одного з окремих випадків, розглянутих вище. Для цього пряму або площину потрібно перевести в проектуюче положення.. Нижче наведене

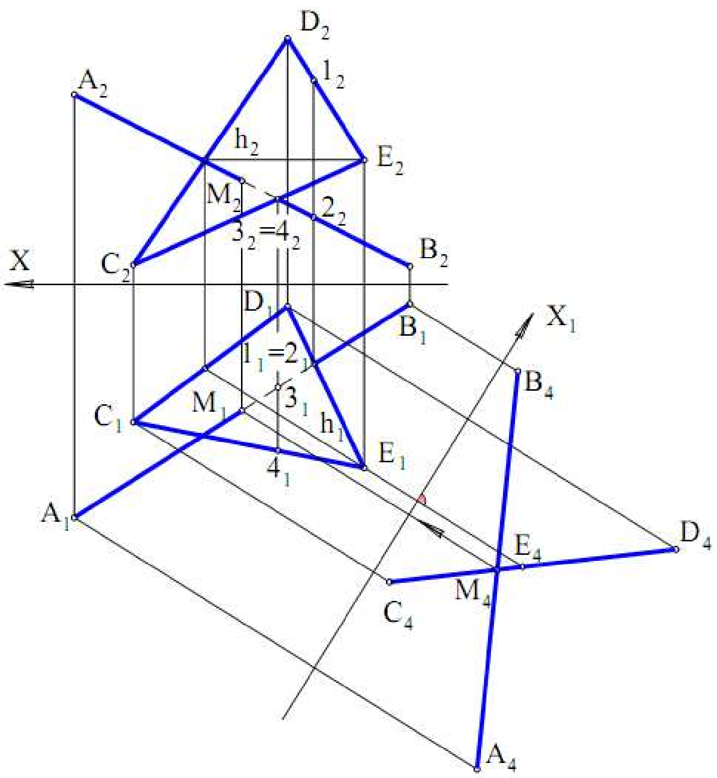


Рис. 2.15

рішення (рис. 2.15), в якому методом заміни площин проекцій у проектуюче положення переведена площина трикутника **CDE**. На $\textbf{П}_4$ визначена проекція $\mathbf{M_4}$ шуканої точки, а потім по лініях зв'язку встановлені проекції точки і на вихідних площинах проекцій. Вихідні дані взяті такими ж, що й у попередній задачі. Тому встановлення видимості проекцій прямої тут не розглядається.

2.3.1. Паралельні площини

Площини будуть паралельними, якщо дві прямі, що перетинаються, однієї площини відповідно паралельні двом прямим, що перетинаються, іншої площини.

На рис. 2.16а площини **Σ** і **Σ′** паралельні, тому що **m‖m′** і **n ‖ n′.**

Приклад вирішення задачі на комплексному кресленні поданий на рис. 2.16,б.

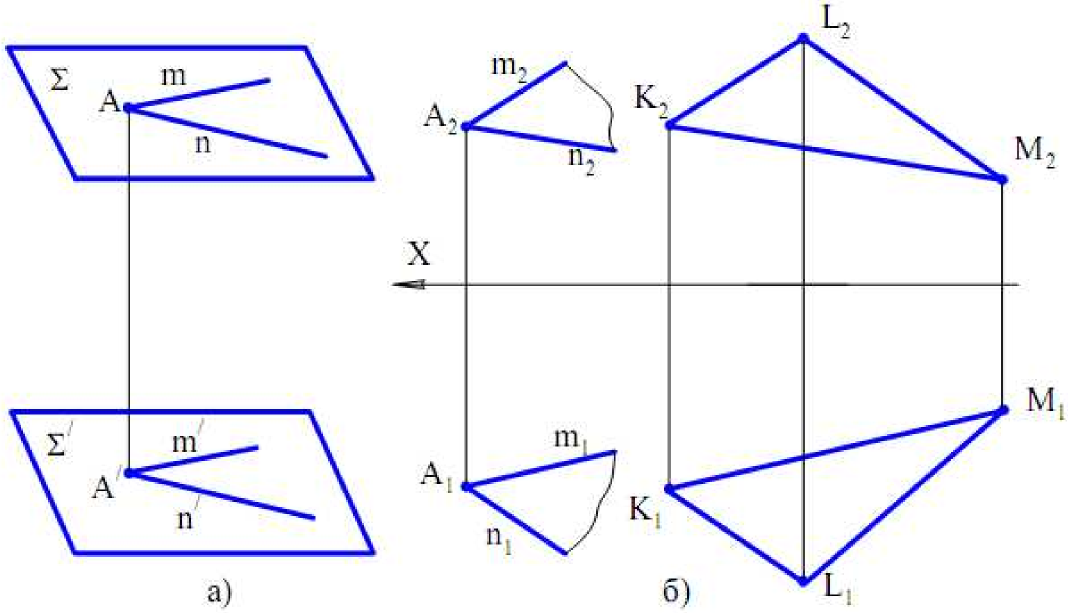


Рис. 2.16

Приклад. Через точку **A** (рис. 2.16,б) потрібно провести площину **Σ′**, паралельну заданій площині **Σ** (**Δ KLM**).

Вирішення. Проводимо через точку **A** дві прямі **m** і **n**, паралельні двом будь-яким пересічним прямим, що перебувають у заданій площині, наприклад сторонам трикутника **KM** і **KL**, відповідно. Пересічні прямі **m** і **n** задають шукану площину **Σ/(m ∩ n)**.

2.3.2. Перетин площин

Лінія перетину двох площин визначається:

1) **двома точками, кожна з яких належить обом площинам**;

2) **однією точкою, що належить двом площинам, і відомим напрямком лінії.**

В обох випадках задача полягає в знаходженні точок, спільних для двох площин. Задача на перетин двох площин називається другою позиційною задачею. Вона може бути зведена до вирішення першої позиційної задачі, розглянутої раніше, за одним з наступних варіантів:

Варіант 1. 1) В одній з площин, наприклад **Σ** (рис. 2.17), вибирають дві довільні прямі **12** і **34**; 2) визначають точки **M** і **K** перетину цих прямих з іншою площиною - **Δ**; точки **M** і **K** задають шукану пряму

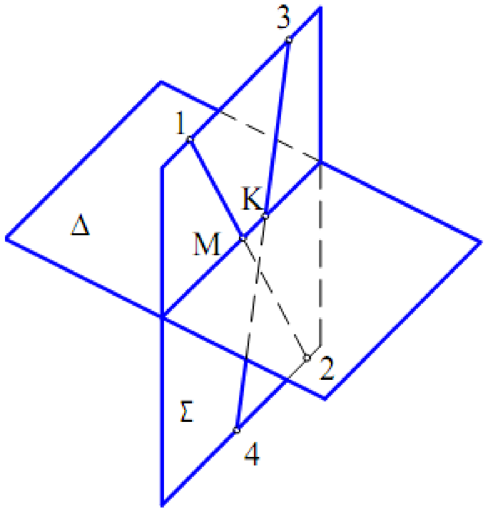


Рис. 2.17

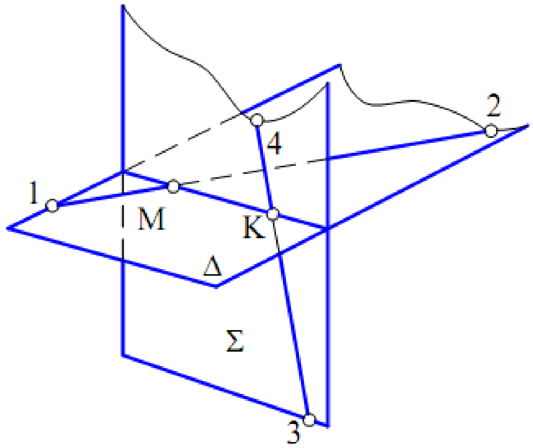


Рис. 2.18

Варіант 2. 1) Вибирають по одній прямій у кожній із заданих площин, наприклад **12**$\in$ **Δ,** а **34**$\in$ **Σ** (рис. 2.18); 2) визначають точки **M** і **K** перетину цих прямих з відповідними площинами - **M=12** $\cap$ **Σ**, **K=34** $\cap$ **Δ**; точки **M** і **K** визначають шукану пряму.

Розглянемо вирішення поставленої задачі на комплексному кресленні для площин загального положення.

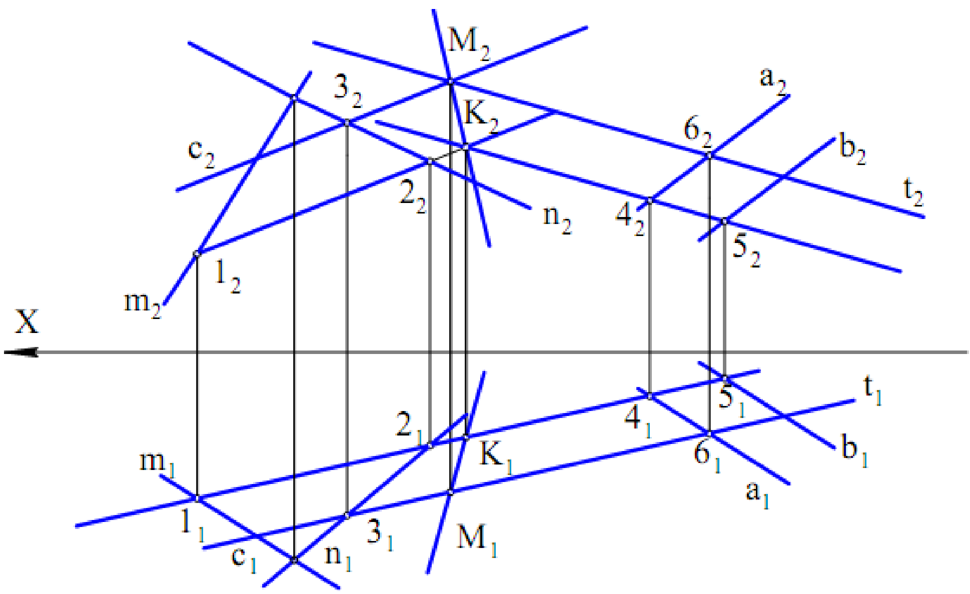


Рис. 2.19

Нехай дано площини **Σ(m** $\cap$ **n)** і **Δ(a** $\parallel$ **b)** загального положення (рис. 2.19). Проведемо в площини **Σ** пряму **12** і побудуємо точку перетину її із площиною **Δ**. Для цього в площині **Δ** побудуємо пряму **45**, що конкурує з **12** відносно $\mathbf{П_1}$.

Прямі **12** і **45** задають горизонтально - проектуючу площину. У перетині прямих **12** і **45** одержуємо точку **K** шуканої лінії перетину. Для побудови точки **M** лінії перетину вводимо в площині **Σ** пряму **c**, паралельну **12** і, яка проходить через точку **3**. Конкуруюча з нею й приналежна площині **Δ** є пряма **t**. У перетині прямих **t** і **d** знаходимо точку **M**. Точки **K** і **M** визначають шукану пряму.

Задача істотно спрощується, якщо одна з площин займає проектуюче положення.

На рис. 2.20 площина **Σ** (**ΔABC**) займає загальне положення, а площина **Δ** (**ΔEFG**) – горизонтально - проектуюче. Тому що шукана пряма належить обом площинам, то на Π_1 її проекція буде збігатися з горизонтальним

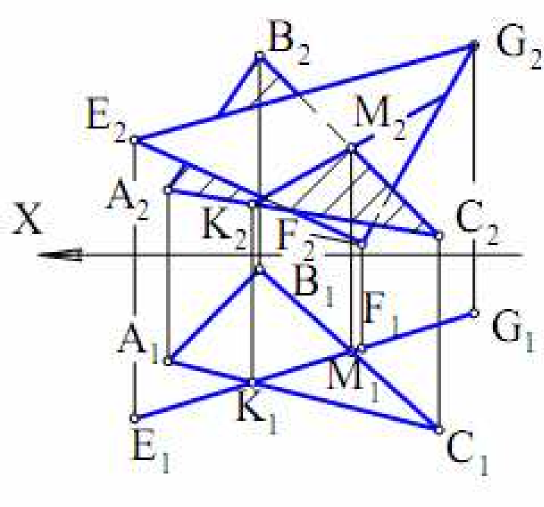


Рис. 2 20

слідом площини **Δ**. Фронтальна проекція шуканої лінії визначена з умови приналежності її площині **Σ.**

При погляді на площину Π_2 по горизонтальній проекції видно, що частина трикутника **ABC** перебуває перед площиною **Δ**. Отже на Π_2 трикутник $K_2C_2M_2$ є видимим. Він виділений штрихуванням. Видимими на Π_2 та відповідно виділені штрихуванням, і трикутники площини **Σ** на околицях точок A_2 і B_2. Це пов'язане з тим, що вони перебувають поза трикутником EFG і ним не перекриваються при погляді на Π_2.

2.3.3. Побудова лінії перетину двох площин по точках перетину прямих ліній із площиною

Для побудови лінії перетину площин будують точки перетину прямих однієї площини з іншою і через них проводять шукану лінію. Приклад такої побудови на кресленні наведений на рис. 2.21. Одна із площин задана трикутником із проекціями $a_1b_1c_1$, $a_2b_2c_2$. Друга - паралельними прямими з проекціями.d_2e_2, d_1e_1 і f_1g_1, f_2g_2.

Для побудови проекцій лінії перетину визначені проекції m2, m1 і n2, n1 двох її точок перетину прямих із проекціями d2e2, d1e1 і f2g2, f1g1, із площиною трикутника. Проекції m_2, m_1, n_2, n_1 точок перетину побудовані за допомогою фронтально – проектуючих площин, заданих слідами Q_2 і P_2.
Площина **Q** проходить через пряму **DE** і перетинає площину трикутника по лінії із проекціями $1_1\ 2_1$, $1_2\ 2_2$. Перетин горизонтальних проекцій $1_1\ 2_1$ і d_1e_1 є горизонтальною проекцією m_1 шуканої точки . По ній побудована фронтальна проекція m_2, на фронтальній проекції d_2e_2.

Аналогічно за допомогою площини **P** (P_2) побудовані **проекції** n_2, n_1 **другої точки.**

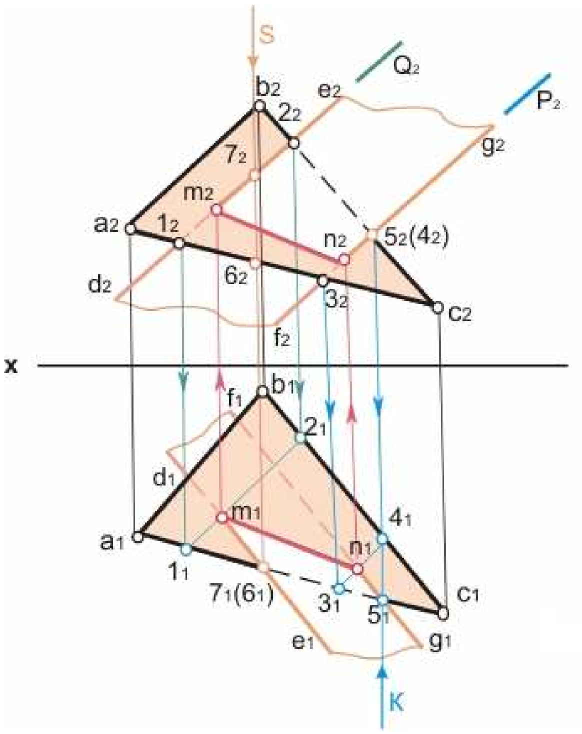


Рис. 2.21

Через побудовані точки $\mathbf{m_2}$, $\mathbf{n_2}$ і $\mathbf{m_1}$, $\mathbf{n_1}$ проведені проекції $\mathbf{m_2\,n_2}$ і $\mathbf{m_1}$, $\mathbf{n_1}$ відрізки, по яких перетинаються задані площини.

Аналіз видимості ділянок площин на фронтальній проекції виконаний за допомогою конкуруючих точок з проекціями $\mathbf{4_2}$, $\mathbf{4_1}$ і $\mathbf{5_2}$, $\mathbf{5_1}$, що лежать на мимобіжних прямих **gf** і **bc.**

Їхні фронтальні проекції $\mathbf{4_2}$ і $\mathbf{5_2}$ збігаються. На горизонтальній проекції видно, що при погляді по стрілці **K** точка $\mathbf{5_2}$ закриває точку $\mathbf{4_2}$. Видимість ділянок площин на горизонтальній проекції визначена так само за допомогою конкуруючих точок із проекціями $\mathbf{6_2}$, $\mathbf{6_1}$ і $\mathbf{7_2}$, $\mathbf{7_1}$, що лежать на мимобіжних прямих **ed** і **ac**. Їхні горизонтальні проекції $\mathbf{6_1}$ і $\mathbf{7_1}$ збігаються. Із фронтальної проекції видно, що при погляді по стрілці **S** точка $\mathbf{7_1}$ закриває точку **6**.

ЛЕКЦІЯ № 3. МЕТРИЧНІ ЗАДАЧІ. ОРТОГОНАЛЬНА ПРОЕКЦІЯ ПРЯМОГО КУТА. ПОБУДОВА ВЗАЄМНО ПЕРПЕНДИКУЛЯРНИХ ФІГУР

1. МЕТРИЧНІ ЗАДАЧІ. ОРТОГОНАЛЬНА ПРОЕКЦІЯ ПРЯМОГО КУТА

До метричних задач, досліджуваних у навчальному курсі нарисної геометрії, відносяться задачі, в яких треба визначити метричні характеристики заданої фігури - довжину, кут, площу та інші, а також метричні властивості й характеристики, обумовлені розташуванням фігури щодо площин проекцій або щодо іншої (інших) фігур - перпендикулярність, відстань і кут. Проекційне вирішення таких задач ґрунтується на метричних властивостях ортогонального проектування на площину і оборотності креслення Монжа. Метричними властивостями ортогонального проектування є існуючі залежності між довжинами відрізка прямої лінії і його проекції, а також між величинами кута і його проекції (див. п. 1). З цих залежностей випливає **теорема про проектування прямого кута:** **щоб прямий кут проектувався у прямий кут, необхідно й достатньо, щоб одна його сторона була паралельна площині проекцій, а інша - не перпендикулярна до цієї площини.**

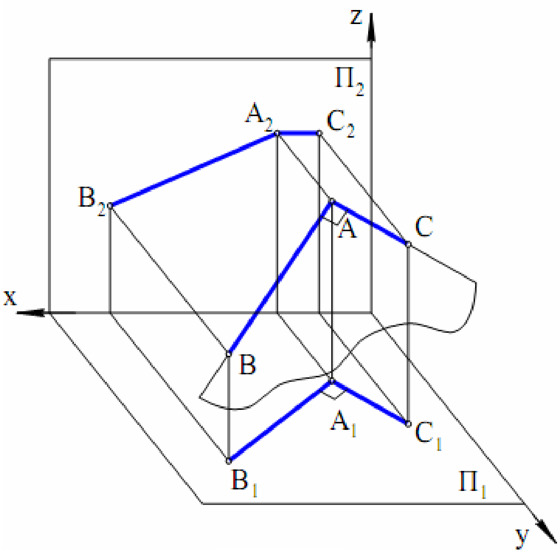


Рис. 3.1

Розглянемо геометричний доказ. Він дозволяє більш наочно побачити числовий і проекційний взаємозв'язок двох геометричних фігур - прямого кута і його проекції.

Необхідність.

Нехай $\angle$ **BAC** = · $\mathbf{B_1A_1C_1}$ **= 90°** (рис. 3.1). Доведемо, що $\mathbf{AC \parallel П_1}$. Припустимо, що **AB** не паралельно $\mathbf{П_1}$ (якщо $\mathbf{AB \parallel П_1}$, то площина кута **BAC** паралельна $\mathbf{П_1}$ і за властивістю 9 ортогонального проектування маємо: · **BAC** =· $\mathbf{B_1A_1C_1}$ **= 90°**). Оскільки · $\mathbf{B_1A_1C_1 \subset П_1}$, · $\mathbf{B_1A_1C_1}$ **= 90°** і $\mathbf{AA_1 \perp П_1}$, що як проектує лінія, то площини **Σ** ($\mathbf{A_1B_1,AA_1}$) і Δ ($\mathbf{A_1C_1,\ AA_1}$) взаємно перпендикулярні. У цьому випадку **AB** і $\mathbf{A_1B_1}$ по суті похила і її ортогональна проекція на площині **Δ**. Тому що $\mathbf{AC} \subset \Delta$ і $\mathbf{AC \perp AB}$, то за теоремою про три перпендикуляри маємо $\mathbf{AC \perp AA_1}$, тобто $\mathbf{AC \parallel П_1}$.

Достатність. Нехай ·**BAC = 90°**, $\mathbf{AC \parallel П_1}$.

Доведемо, що · $\mathbf{B_1A_1C_1}$ **= 90°**.

За даних умов маємо: **AB** – похила, $\mathbf{A_1B_1}$ – її проекція на $\mathbf{\Pi_1}$. За теоремою про три перпендикуляри маємо: ($\mathbf{AC \perp AB}$, $\mathbf{AC \parallel \Pi_1}$) $\Rightarrow$ $\mathbf{AC \perp A_1B_1}$. З $\mathbf{AC \parallel \Pi_1}$ витікає, що $\mathbf{AC \parallel A_1C_1}$. Отже, $\mathbf{A_1C_1 \perp A_1B_1}$ і $\mathbf{\cdot B_1A_1C_1 = 90°}$.

З оборотності комплексного креслення (КЧ) необхідно, що якщо $\mathbf{A_2B_2}$, $\mathbf{A_1B_1}$ і $\mathbf{C_2B_2}$, $\mathbf{C_1B_1}$ – проекції пересічних прямих **AB** і **CB**, то при виконанні однієї із двох наступних проекційних умов:

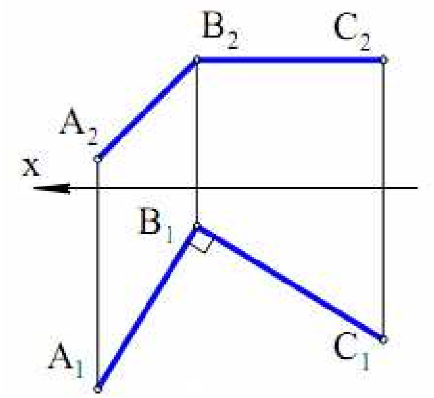


Рис. 3.2

1) $A_1B_1 \perp C_1B_1$ і $A_2B_2 \parallel X$ або $C_2B_2 \parallel X$;

2) $A_2B_2 \perp C_2B_2$ і $A_1B_1 \parallel X$ або $C_1B_1 \parallel X$ у просторі має місце перпендикулярність AB $\perp$CB (рис. 3.2).

Метричні задачі курсу нарисної геометрії можна умовно розділити на такі групи:

1) побудова взаємно перпендикулярних фігур: прямих, площин, прямих і площин;

2) визначення довжин відрізків (відстаней) і натуральної величини (НВ) плоскої фігури;

3) визначення кутів між фігурами.

Розглянемо приклади рішень на КЧ метричних задач у кожній групі.

2. ПОБУДОВА ВЗАЄМНО ПЕРПЕНДИКУЛЯРНИХ ФІГУР

2.1 Перпендикулярність двох прямих

Визначення. Дві прямі у просторі називаються перпендикулярними, якщо кут між ними дорівнює **90°**. Перпендикулярні прямі можуть бути пересічними або мимобіжними.

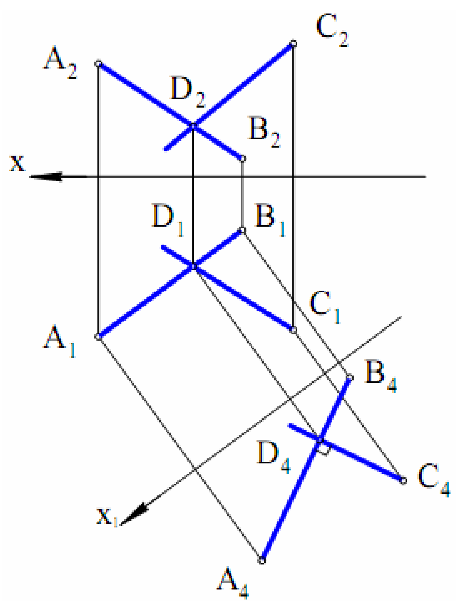


Рис. 3.3

Задача. Дано пряму **AB** і точку **C**. Побудувати пряму, що проходить через точку **C** і яка перетинає **AB** під прямим кутом (рис. 3.3).

Вирішення задачі ґрунтується на побудовах, що приводять до проекційного зображення умов теореми про проекцію прямого кута (див. рис. 3.2).

Алгоритм вирішення в символічному записі буде наступним:

1) $\mathbf{x_1 \parallel A_1B_1}$;

2) $\mathbf{(A_2B_2, A_1B_1) \Rightarrow A_4B_4}$; $\mathbf{(C_2, C_1) \Rightarrow C_4}$;

3) $\mathbf{C_4D_4 \perp A_4B_4}$;

4) $\mathbf{D_4 \Rightarrow D_1 \in A_1B_1}$; $\mathbf{D_1 \Rightarrow D_2 \in A_2B_2}$.

$\mathbf{C_1D_1}$, $\mathbf{C_2D_2}$ – рішення задачі.

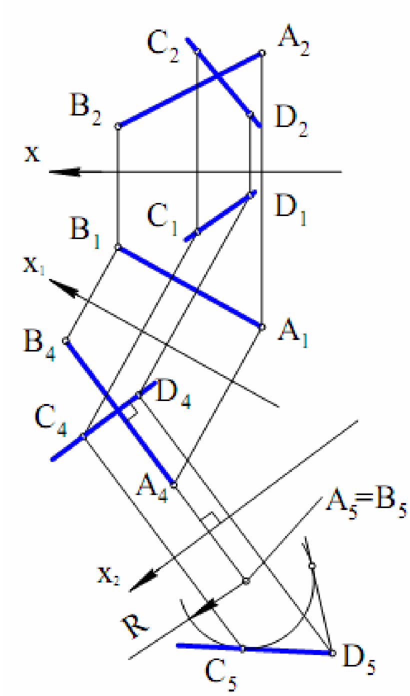


Рис. 3.4

Задача. Дано пряму **AB** і точку **D** (рис.3.4). Побудувати пряму, що проходить через точку **D**, перпендикулярну до прямої **AB** і утворюючу з нею найкоротшу відстань **R**, де **R** < ρ(**D, AB**); ρ - відстань між фігурами, зазначеними в дужках.

З умови задачі випливає, що задана й шукана пряма - мимобіжні. Кінці відрізка найкоротшої відстані R утворять дві множини точок: пряму **AB** і циліндричну поверхню обертання з віссю **AB**. Із точки **D** можна провести лише дві прямі, дотичні до циліндричної поверхні та які утворюють кут **90°** з прямою **AB**. Алгоритм вирішення даної задачі в символічному записі має вигляд:

1) $\mathbf{x_1 \parallel A_1B_1}$;

2) $(\mathbf{A_2B_2, A_1B_1}) \Rightarrow \mathbf{A_4B_4}$; $(\mathbf{D_1, D_2}) \Rightarrow \mathbf{D_4}$;

3) $\mathbf{x_2 \perp A_4B_4}$;

4) $(\mathbf{A_1B_1, A_4B_4}) \Rightarrow \mathbf{A_5 = B_5}$; $(\mathbf{D_1, D_4}) \Rightarrow \mathbf{D_5}$;

5) $\mathbf{D_5C_5}$ – дотична до кола радіуса **R**;$\mathbf{D_4C_4 \perp A_4B_4}$;

6) $(\mathbf{C_5, C_4}) \Rightarrow \mathbf{C_1}$; $(\mathbf{C_4, C_1}) \Rightarrow \mathbf{C_2}$.

$\mathbf{C_2D_2}$, $\mathbf{C_1D_1}$ – одне з двох рішень задачі.

2.2. Перпендикулярність прямої і площини

Визначення. Пряма називається перпендикулярною до площини, якщо вона перпендикулярна до двох пересічних прямих, що лежать у цій площині.

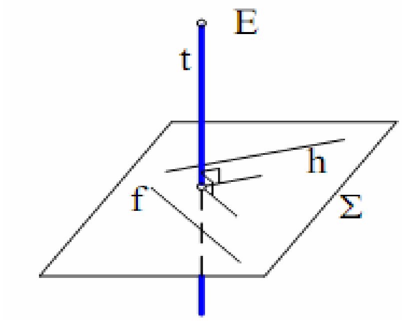


Рис. 3.5

Приведемо без доказу відомі в шкільному курсі стереометрії теореми, необхідні для вирішення наступних метричних задач.

1) Ознака перпендикулярності прямої і площини: якщо пряма перпендикулярна до двох пересічних прямих, що лежать у площині, то вона перпендикулярна до цієї площини.

2) Через будь-яку точку простору проходить єдина пряма, перпендикулярна до даної площини.

3)Через будь-яку точку простору проходить єдина площина, перпендикулярна до даної прямої.

Для побудови прямої t ⊥ **E**, перпендикулярної до площини **Σ**, необхідно, на підставі ознаки перпендикулярності, провести в площині дві пересічні прямі

h і **f**, а потім побудувати пряму **t** за умовами: **t** ⊥ h, **t** ⊥ **f** (рис. 3.5). У загальному випадку прямі **t** і **h**, **t** і **f** - пари мимобіжних прямих.

Задача. Дано площину **Σ** (**ΔАВС**) і точку **Е**.Побудувати пряму **t** за умовами: **t э Е**, **t** ⊥ **Σ** (рис. 3.6).

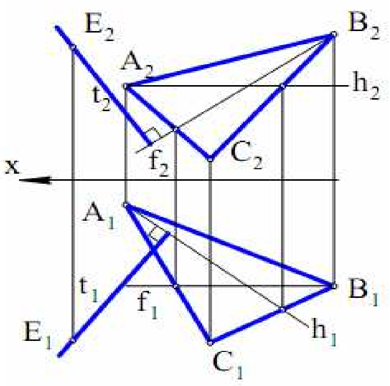


Рис. 3.6

Вирішення задачі може бути наступним:

1) будують лінії рівня **h** і **f** у площині **Σ**, де $\mathbf{h_2 \parallel x}$, $\mathbf{f_1 \parallel x}$;

2) будують проекції $\mathbf{t_1}$ і $\mathbf{t_2}$ шуканої прямої **t**, де $\mathbf{t_2}$ **э** $\mathbf{E_2}$, $\mathbf{t_2 \perp f_2}$; $\mathbf{t_1}$ **э** $\mathbf{E_1}$, $\mathbf{t_1 \perp h_1}$.

У підсумку $\mathbf{t_1}$, $\mathbf{t_2}$ – рішення задачі. Пряма **t** мимобіжна з **f** і **h**.

Вибір ліній рівня **h** і **f** у якості пересічних прямих у площині **Σ** продиктований наведеними вище умовами теореми про проектування прямого кута й простотою побудов на КК(комплексному кресленні). Якщо точка **Е** перебуває в площині **Σ**, то послідовність побудов залишається попередньою.

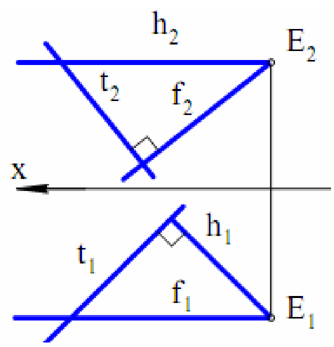


Рис. 3.7

Задача. Дано пряму **t** і точку **Е**. Побудувати площину, що проходить через точку **Е** і перпендикулярну до прямої **t** (рис. 3.7).

Вирішення задачі ґрунтується на побудові двох ліній рівня $\mathbf{h(h_1,h_2)}$ і $\mathbf{f(f_1,f_2)}$, що проходять через точку **Е**: $\mathbf{h_2}$ **э** $\mathbf{E_2}$, $\mathbf{h_2 \parallel x}$, $\mathbf{h_1}$ **э** $\mathbf{E_1}$, $\mathbf{h_1 \perp t_1}$; $\mathbf{f_1}$ **э** $\mathbf{E_1}$, $\mathbf{f_1 \parallel x}$, $\mathbf{f_2}$ **э** $\mathbf{E_2}$, $\mathbf{f_2 \perp t_2}$.

Площина (**h , f**) - рішення задачі

2.3. Лінії найбільшого нахилу

Приведемо відому в нарисній геометрії теорему**: прямі в площині, перпендикулярні до її ліній рівня, є лініями найбільшого нахилу цієї площини до площин проекцій**.

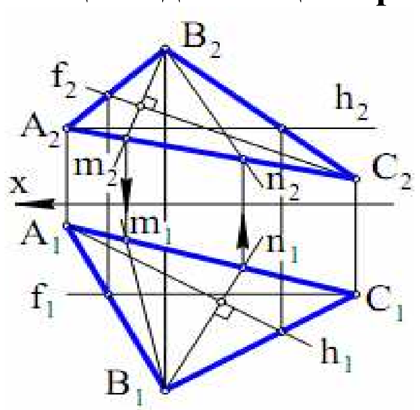


Рис. 3.8

Ця теорема дозволяє виконувати побудови ліній найбільшого нахилу на КК.

Задача. Дано площину **Σ**(**ΔАВС**). Побудувати її лінії найбільшого нахилу, щодо площин проекцій $\mathbf{П_1}$ і $\mathbf{П_2}$ (рис. 3.8), що проходять через вершину **В**.

Алгоритм проекційного вирішення задачі буде наступним:

1) будують в площині **Σ** лінії рівня $\mathbf{h(h_1,h_2)}$ і $\mathbf{f(f_1,f_2)}$, де $\mathbf{h_2 \parallel x}$, $\mathbf{f_1 \parallel x}$;

2) будують спочатку $\mathbf{m_2}$ **э** $\mathbf{B_2}$, $\mathbf{m_2 \perp f_2}$, потім $\mathbf{m_1}$;

3) будують спочатку $\mathbf{n_1}$ э $\mathbf{B_1}$, $\mathbf{n_1} \perp \mathbf{h_1}$, потім $\mathbf{n_2}$.

Лінія $\mathbf{m(m_1,m_2)}$ визначає найбільший нахил площини $\mathbf{\Sigma}$ до площини проекцій $\mathbf{\Pi_2}$,а лінія $\mathbf{n(n_1,n_2)}$ визначає найбільший нахил площини $\mathbf{\Sigma}$ до площини проекцій $\mathbf{\Pi_1}$.

2.4. Дотична площина й нормаль до поверхні

У будь-якій точці **A** поверхні $\mathbf{\Sigma}$ можна побудувати єдину дотичну площину (рис. 3.9). Для цього на поверхні через точку **A** необхідно провести дві криві **a** і **b**, а потім побудувати дві дотичні $\mathbf{a^1}$ і $\mathbf{b^1}$відповідно к **a** і **b**. Дотична площина Δ утворена прямими $\mathbf{a^1}$ і $\mathbf{b^1}$. Пряма $\mathbf{n} \perp \mathbf{\Delta}$ називається **нормаллю** поверхні $\mathbf{\Sigma}$ у точці **A**.

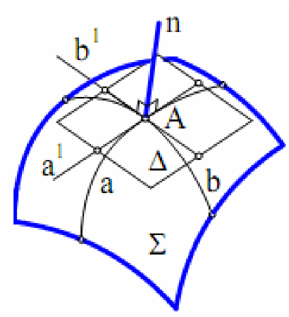


Рис. 3.9

Задача. Дано сферу і точку **A** на ній. Побудувати дотичну площину і нормаль до сфери в точці **A** (рис. 3.10).

Вирішення задачі можна виконати наступним чином:

1) побудуємо два кола $\mathbf{a(a_1, a2)}$ і $\mathbf{b(b_1 ,b_2)}$ на сфері, що перетинаються в точці $\mathbf{A(A_1,A_2)}$;

2) проведемо дві дотичні $\mathbf{a_1(a^1{}_1, a^1{}_2)}$ і $\mathbf{b_1(b^1{}_1, b^1{}_2}$) до кіл **a** і **b** відповідно; шукана дотична площина утвориться дотичними $\mathbf{a_1}$ і $\mathbf{b_1}$;

3) побудуємо нормаль $\mathbf{n(n_1,n_2)}$ до поверхні сфери по наступних умовах: $\mathbf{n_1} \perp \mathbf{b^1{}_1}$, $\mathbf{n_2} \perp \mathbf{a^1{}_2}$. Зазначимо, що поверхня сфери складається тільки із простих точок.

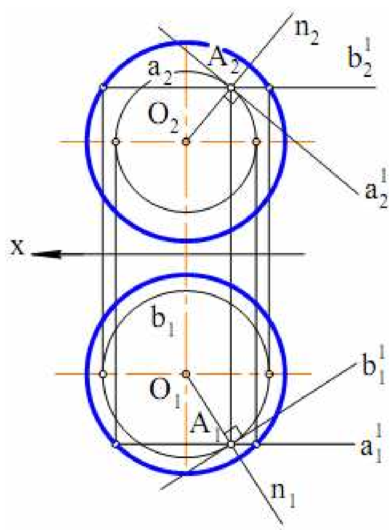


Рис. 3.10

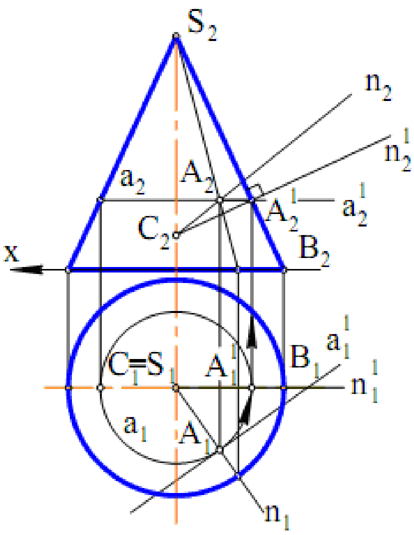


Рис. 3.11

Задача. Дано конічну поверхню обертання і точку **A** на ній. Побудувати дотичну площину і нормаль до поверхні в точці **A** (рис. 3.11).

Вирішення задачі:

1) побудуємо на конічній поверхні дві лінії, що перетинаються в точці **A**: коло **a**(a_1, a_2) і пряму **b** = **SA**(S_1A_1, S_2A_2);

2) проведемо дотичну $a_1(a^1{}_1, a^1{}_2)$ до кола **a**; дві пересічні в точці **A** прямі a_1 і **SA** утворять дотичну площину до поверхні конуса;

3) за допомогою перетворення обертанням (див. рис. 3.11) побудуємо проміжне положення $n_1(n^1{}_1, n^1{}_2)$ шуканої нормалі **n**, а потім її шукане положення $n(n_1, n_2)$.

Вершина **S** - єдина особлива точка на поверхні конуса.

2.5. Перпендикулярність двох площин

Визначення. Дві площини називаються перпендикулярними, якщо кут між ними дорівнює 90°. Приведемо без доказу теореми стереометрії, корисні для вирішення наступних метричних задач:

1) Ознака перпендикулярності двох площин: якщо площина проходить через перпендикуляр до іншої площини, то вона перпендикулярна до цієї площини;

2) Якщо дві площини, перпендикулярні до третьої площини, перетинаються, то пряма їхнього перетину перпендикулярна до третьої площини;

3) Для похилої прямої, яка не є перпендикулярна до площини, має місце твердження: через похилу проходить єдина площина, перпендикулярна до даної площини.

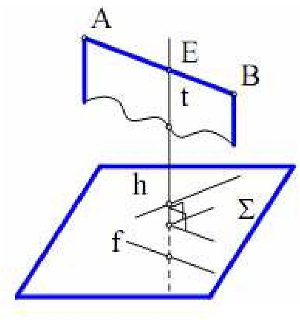


Рис. 3.12

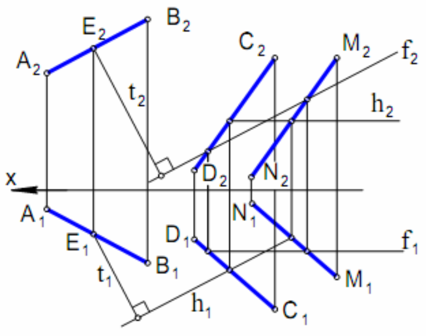


Рис. 3.13

Останнє твердження дозволяє запропонувати наступний алгоритм побудови площини, що проходить через похилу **AB** і перпендикулярну до заданої площини **Σ**:

1) на **AB** вибирають довільну точку **E**;

2) будують пряму **t** таким чином, що **t** ∍ **E**; $t \perp h$; $t \perp f$, де $h \subset \Sigma$, $f \subset \Sigma$ (рис. 3.12), тобто $t \perp \Sigma$.

Площина (**AB, t**) буде єдиною площиною, перпендикулярною до площини **Σ**. Зазначимо, що через пряму $t \perp \Sigma$ проходить не одна площина, перпендикулярна до **Σ**.

Задача. Дано площину **Σ**(**CD, MN**), де $CD \parallel MN$ і пряму **AB** (рис. 3.13). Побудувати на КК площину, що проходить через **AB** і перпендикулярну до площини **Σ**.

Алгоритм проекційного вирішення задачі:

1) будують лінії рівня $h(h_1, h_2)$ і $f(f_1, f_2)$ у площині **Σ**, при цьому $h_2 \parallel x$, $f_1 \parallel x$;

2) будують проекції $\mathbf{t_1}$ і $\mathbf{t_2}$ прямої **t** таким чином, що $\mathbf{t_2 \ni E_2}$, $\mathbf{t_2} \perp \mathbf{f_2}$; $\mathbf{t_1 \ni E_1}$, $\mathbf{t_1} \perp \mathbf{h_1}$, де $\mathbf{E} \in \mathbf{AB}$ – довільна точка.

Площина (**AB**, **t**) - рішення задачі.

Задача. Дано площини **Σ(AB, DC**) і **Δ(KL, PT**), де $\mathbf{AB} \cap \mathbf{DC}$, $\mathbf{KL} \| \mathbf{PT}$, а також точку **E**. Побудувати площину, що проходить через точку **E** і перпендикулярну до обох площин **Σ** і **Δ** (рис. 5.17).

Одне з можливих рішень даної задачі полягає в наступному. Спочатку будують лінію перетину заданих площин $\mathbf{t} = \mathbf{\Sigma} \cap \mathbf{\Delta}$. Потім, на підставі наведених теорем стереометрії, будують площину, що проходить через точку **E** і перпендикулярна до лінії **t**. Будучи єдиною, ця площина являє собою рішення задачі.

Можливий інший алгоритм вирішення даної задачі (див. рис. 5.16):

1) з даної точки **E** опускають перпендикуляр **a** на площину**Σ**;

2) із точки **E** опускають перпендикуляр **b** на площину **Δ**.

Площина (**a, b**), де $\mathbf{a} \cap \mathbf{b}$ = E, є рішенням задачі. Розглянемо реалізацію цього алгоритму на КК (див. рис. 5.17).

1) У площині **Σ** побудуємо лінії рівня $\mathbf{h_1}(\mathbf{h^1}_1, \mathbf{h^1}_2)$ і $\mathbf{f_1}(\mathbf{f^1}_1, \mathbf{f^1}_2)$. При цьому $\mathbf{h^1}_2 \| \mathbf{x}$; $\mathbf{f^1}_1 \| \mathbf{x}$.

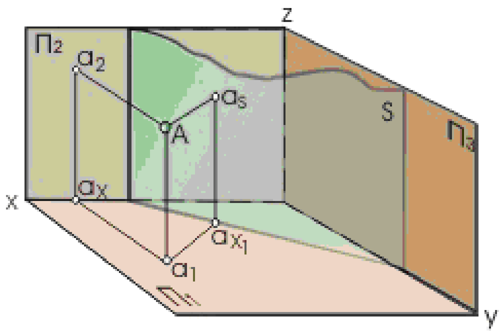
2) У площині Δ побудуємо лінії рівня $\mathbf{h_2}(\mathbf{h^2}_1, \mathbf{h^2}_2)$ і $\mathbf{f}_2(\mathbf{f^2}_1, \mathbf{f^2}_2)$. При цьому $\mathbf{h^2}_2 \| \mathbf{x}$; $\mathbf{f^2}_1 \| \mathbf{x}$.

3) Із точки **E** опускаємо два перпендикуляри: $\mathbf{a} \perp \mathbf{\Sigma}$, $\mathbf{b} \perp \Delta$. При цьому $\mathbf{a_2} \perp \mathbf{f^1}_2$, $\mathbf{a_1} \perp \mathbf{h^1}_1$; $\mathbf{b_2} \perp \mathbf{f^2}_2$, $\mathbf{b_1} \perp \mathbf{h^2}_1$.

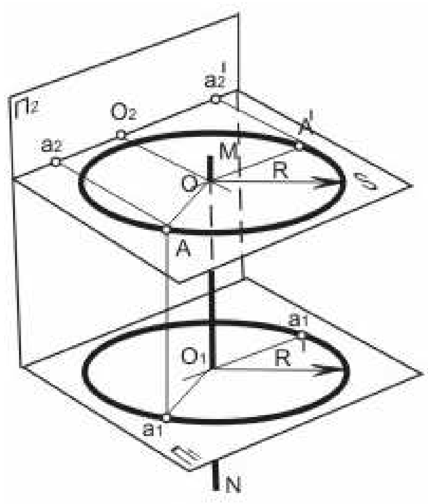
Дві прямі **a** і **b**, що перетинаються в точці **E**, визначають шукану площину, тобто площину, перпендикулярну до заданих площин **Σ** і **Δ**.

ЛЕКЦІЯ № 4. ПЕРЕТВОРЕННЯ КОМПЛЕКСНОГО КРЕСЛЕННЯ

Нарисна геометрія має у своєму розпорядженні способи, за допомогою яких можна перейти від загальних положень заданих геометричних образів до окремих, що значно спрощує вирішення задачі й дозволяє одержати більш точну відповідь. Ці способи називаються способами перетворення проекцій і полягають у послідовній заміні площин проекцій і в обертанні геометричних образів навколо певних осей.



Спосіб заміни площин проекцій



Спосіб обертання

1. СПОСІБ ЗАМІНИ ПЛОЩИН ПРОЕКЦІЙ

Метод заміни площин проекцій полягає в тому, що замість однієї із площин проекцій вводиться нова площина, перпендикулярна до іншої площини проекцій.

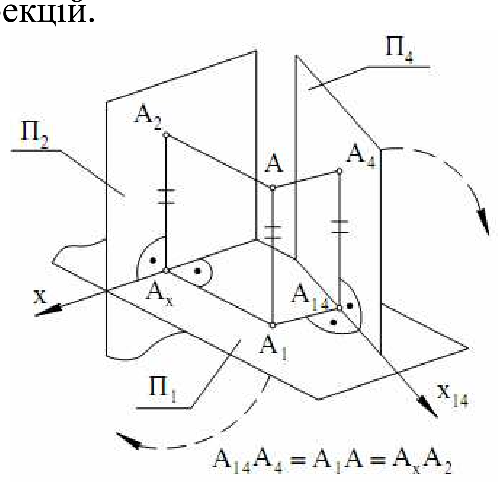


Рис. 4.1

На рис. 4.1 показана просторова схема одержання комплексного креслення точки **A** в системі (**$\Pi_1\Pi_2$**). точки **A_1** і **A_2** – горизонтальна і фронтальна проекції точки **A**, **$AA_1A_xA_2$** – прямокутник, площина якого перпендикулярна до осі **X** (рис. 4.1).

Нова площина **Π_4** перпендикулярна до **Π_1**. При проектуванні точки **A** на **Π_4** одержимо нову проекцію **A_4**, фігура **$AA_1A_{14}A_4$** – прямокутник, площина якого перпендикулярна до нової осі

x_{14} = Π_4 ∩ Π_1. Для одержання комплексного креслення будемо розглядати фігури, розташовані в площинах проекцій. Поворотом навколо осі $\mathbf{x_{14}}$ сполучимо $\mathbf{П_4}$ з $\mathbf{П_1}$, потім поворотом навколо осі **x** сполучимо $\mathbf{П_1}$ (і $\mathbf{П_4}$) з $\mathbf{П_2}$ (на рис. 4.1 напрямки руху площин $\mathbf{П_4}$ і $\mathbf{П_1}$ показані штриховими лініями зі стрілками).

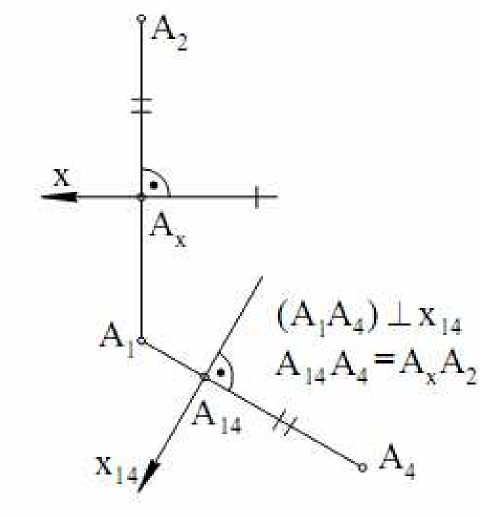


Рис. 4.2

Отримане креслення наведено на рис. 4.2. Прямі кути на рис. 4.1, 4.2 позначені дугою з точкою, рівні відрізки позначені двома штрихами (протилежні сторони прямокутників на рис. 4.1). Від комплексного креслення точки **A** в системі ($\mathbf{П_1П_2}$) перейшли до комплексного креслення точки **A** в системі ($\mathbf{П_1П_4}$), замінили площину $\mathbf{П_2}$ на площину $\mathbf{П_4}$, замінили $\mathbf{A_2}$ на $\mathbf{A_4}$. На основі цих побудов сформулюємо правило заміни площин проекцій (правило одержання нової проекції). Через незамінну проекцію проводимо нову лінію проекційного зв'язку перпендикулярно до нової осі, потім від нової осі по лінії проекційного зв'язку відкладаємо відрізок, довжина якого дорівнює відстані від замінної проекції до старої осі, отримана при цьому точка і є нова проекція.

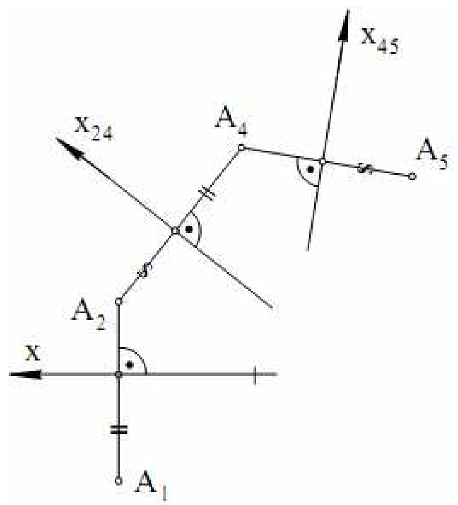


Рис. 4.3

Напрямок нової осі будемо брати довільно. Новий початок координат вказувати не будемо.

На рис. 4.3 показаний перехід від комплексного креслення в системі ($\mathbf{П_1П_2}$) до комплексного креслення в системі ($\mathbf{П_2П_4}$), а потім ще один перехід до комплексного креслення в системі ($\mathbf{П_4П_5}$). Замість площини $\mathbf{П_1}$ введена площина $\mathbf{П_4}$, перпендикулярна до $\mathbf{П_2}$, потім замість $\mathbf{П_2}$ введена площина $\mathbf{П_5}$, перпендикулярна до $\mathbf{П_4}$. Використовуючи правило заміни площин проекцій, можна виконати будь-яку кількість замін площин проекцій.

1.1. Визначення відстані між двома точками

Відстанню між двома точками називається довжина відрізка, що з'єднує ці точки. Для визначення відстані між двома точками **A** і **B** необхідно з'єднати їх відрізком **AB** (рис. 4.4), потім визначити довжину цього відрізка. Відрізок загального положення не паралельний до жодної з площин проекцій.

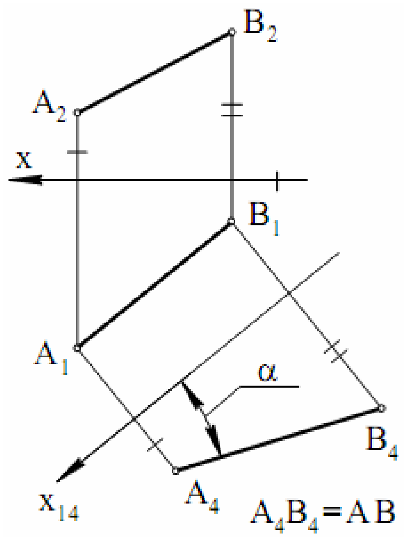


Рис. 4.4

Довжини проекцій $\mathbf{A_1B_1}$ і $\mathbf{A_2B_2}$ менше довжини відрізка **АВ**. Для того щоб визначити довжину відрізка **АВ**, необхідно спроектувати його в натуральну величину і виміряти цю проекцію, тому що вона дорівнює відрізку **АВ**.

Введемо нову площину проекцій $\mathbf{\Pi_4}$ паралельно відрізку **АВ** і перпендикулярно до $\mathbf{\Pi_1}$. При цьому нова вісь $\mathbf{x_{14}}$ буде паралельна $\mathbf{A_1B_1}$ (у протилежному виразі пряма **АВ** і площина $\mathbf{\Pi_4}$ перетнуться). Кут нахилу відрізка **АВ** до площини $\mathbf{\Pi_4}$ дорівнює нулю, і **АВ** на $\mathbf{\Pi_4}$ проектується в натуральну величину, тобто $\mathbf{A_4B_4 = AB}$. Вимірявши відрізок $\mathbf{A_4B_4}$, одержимо довжину відрізка **АВ**.

Кожну з точок $\mathbf{A_4}$ і $\mathbf{B_4}$ будували з використанням правила заміни площин проекцій.

Відстань між $\mathbf{A_1B_1}$ і $\mathbf{x_{14}}$ не впливає на величину $\mathbf{A_4B_4}$, тому може бути взята довільно. У результаті введення $\mathbf{\Pi_4}$ виконаний перехід від системи ($\mathbf{\Pi_1 \perp \Pi_2}$) до системи ($\mathbf{\Pi_1 \perp \Pi_4}$), в якій пряма **АВ**, що проходить через відрізок **АВ**, є лінією рівня.

На площині $\mathbf{\Pi_4}$ (рис. 4.4) крім $\mathbf{A_4B_4 = AB}$ одержали кут $\boldsymbol{\alpha}$, що дорівнює куту між **АВ** і площиною $\mathbf{\Pi_1}$, тому що площина цього кута паралельна до площини $\mathbf{\Pi_4}$. Якщо ввести нову площину $\mathbf{\Pi_5}$ паралельно **АВ** і перпендикулярно до $\mathbf{\Pi_2}$, то нова вісь $\mathbf{x_{25}}$ буде паралельна $\mathbf{A_2B_2}$. Одержимо $\mathbf{A_5B_5 = AB}$ і кут $\boldsymbol{\beta}$, що дорівнює куту між **АВ** і площиною $\mathbf{\Pi_2}$, тому що площина цього кута паралельна площині $\mathbf{\Pi_5}$.

1.2. Проектування прямої загального положення в точку на нову площину проекцій

Надання фігурам окремого положення щодо площин проекцій значно полегшує вирішення багатьох задач. Щоб пряма загального положення в новій системі площин проекцій стала проектуючою прямою, необхідно, щоб нова площина проекцій була перпендикулярна до прямої. Пряма на цю площину спроектується в точку. Площина, перпендикулярна до прямої загального положення, є площиною загального положення. Введення такої площини, як нова площина проекцій неможливо, тому що нова площина проекцій повинна бути перпендикулярна до однієї із «старих» площин проекцій. Таким чином, вирішити задачу проектування прямої загального положення в точку однією заміною площини проекцій не можна. Тому спробуємо вирішити задачу спочатку для прямої окремого положення, а саме - для прямої рівня.

Нехай $\mathbf{h}(\mathbf{h_1}, \mathbf{h_2})$ – горизонталь (рис. 4.5). Введемо нову площину проекцій $\mathbf{П_4}$ перпендикулярно до **h**. Оскільки **h** паралельна $\mathbf{П_1}$, то $\mathbf{П_4}$ буде перпендикулярна $\mathbf{П_1}$. Площина $\mathbf{П_4}$ може бути взята як нова площина проекцій і на неї **h** спроектується в точку. Нова вісь $\mathbf{x_{14}}$ перпендикулярна проекції $\mathbf{h_1}$, тому що $\mathbf{h_1}$ паралельна **h** і, виходить, перпендикулярна $\mathbf{П_4}$ і $\mathbf{x_{14}}$. Для побудови нової проекції горизонталі побудуємо нові проекції двох її точок **1** і **2**. Нові проекції цих точок, побудовані за правилом заміни площин проекцій, збігаються. Тому що точки **1** і **2** взяті довільно, то проекції інших точок горизонталі теж збіжаться, тобто горизонталь проектується на $\mathbf{П_4}$ у точку.

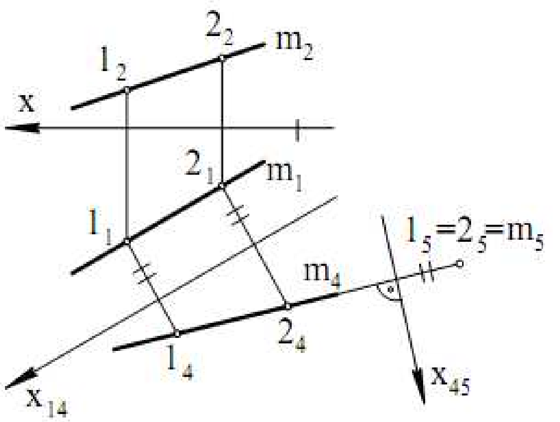


Рис. 4.5

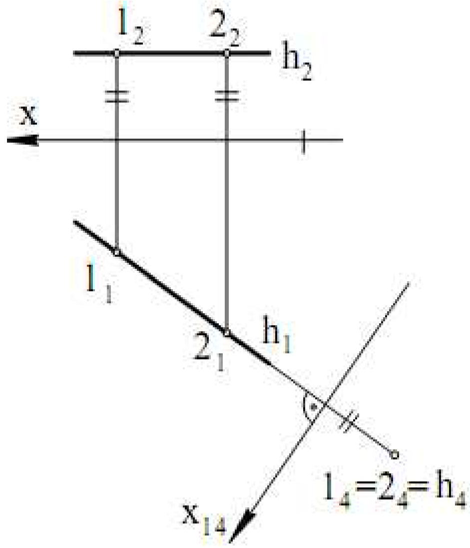


Рис. 4.6

Використовуючи рішення задачі проектування лінії рівня в точку, можна виконати проектування прямої загального положення **m** у точку (рис. 4.6). Введемо нову площину проекцій $\mathbf{П_4}$ паралельно прямій **m** і перпендикулярно до $\mathbf{П_1}$. Нова вісь $\mathbf{x_{14}}$ паралельна до горизонтальної проекції $\mathbf{m_1}$. За новими проекціями двох довільних точок **1** і **2** прямій **m** знаходимо $\mathbf{m_4}$. У новій системі площин ($\mathbf{П_1 \perp П_4}$) пряма **m** є лінією рівня, вона паралельна $\mathbf{П_4}$ (при цьому $\mathbf{m_1}$ паралельна $\mathbf{x_{14}}$). Тепер, використовуючи рішення попередньої задачі (рис. 4.5), спроектуємо пряму **m** в точку. Для цього вводимо нову площину проекцій $\mathbf{П_5}$ перпендикулярно до прямої **m** і перпендикулярно до $\mathbf{П_4}$. Пряма **m** на $\mathbf{П_5}$ проектується в точку. У новій системі площин проекцій ($\mathbf{П_4 \perp П_5}$) пряма **m** є проектуючою прямою.

1.3. Проектування площини загального положення в пряму на нову площину проекцій. Знаходження натуральної величини плоскої фігури

Якщо спроектувати яку-небудь пряму **m**, що належить площині загального положення **Σ**, у точку, то площина **Σ** спроектується на цю ж площину проекцій у пряму лінію. Дійсно, пряма **m** перпендикулярна до площини проекцій і, виходить, площина **Σ** проходить через перпендикуляр до площини проекцій і теж їй перпендикулярна. Площина **Σ** є проектуючою площиною і на площину проекцій проектується в пряму. Якщо **m** - пряма загального положення, то для проектування її в точку будуть потрібні дві заміни площин проекцій (рис. 4.6). Якщо **m** - пряма рівня, то для її проектування в точку буде потрібна одна заміна площин проекцій (рис. 4.5).

Нехай **Σ** – площина загального положення, задана трикутником **ABC** (рис. 4.7). У площині **Σ** проведемо горизонталь **h**, запроектуємо горизонталь **h** у точку $\mathbf{h_4}$ на площину $\mathbf{\Pi_4}$ ($\mathbf{x_{14} \perp h_1}$, $\mathbf{\Pi_4 \perp h}$), побудуємо нові проекції точок $\mathbf{A_4}$, $\mathbf{B_4}$, $\mathbf{C_4}$.

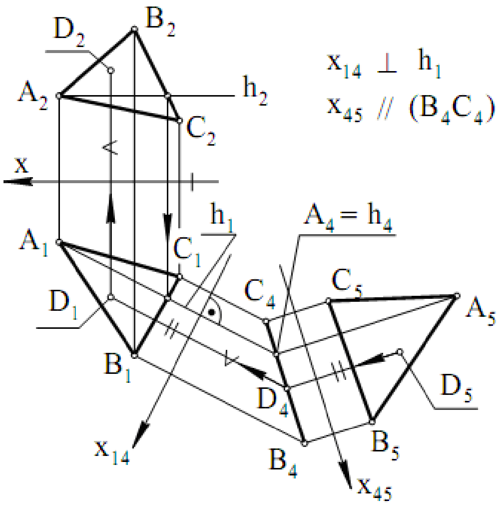


Рис. 4.7

Площина **Σ** проектується в пряму, що проходить через точки $\mathbf{A_4}$, $\mathbf{B_4}$, $\mathbf{C_4}$. Площина **Σ** у системі ($\mathbf{\Pi_1\Pi_4}$) є проектуючою площиною - вона перпендикулярна до $\mathbf{\Pi_4}$. Трикутник **ABC** проектується на $\mathbf{\Pi_4}$ у відрізок $\mathbf{B_4C_4}$. Для знаходження натуральної величини трикутника **ABC** введемо площину проекцій $\mathbf{\Pi_5}$ паралельну площині трикутника і перпендикулярно до $\mathbf{\Pi_4}$. Нова вісь $\mathbf{x_{45}}$ паралельна відрізку $\mathbf{D_4C_4}$ (у протилежному разі **Σ** і $\mathbf{\Pi_5}$ перетнуться). Трикутник **ABC** проектується на площину $\mathbf{\Pi_5}$ у натуральну величину $\Delta \mathbf{A_5B_5C_5} = \Delta \mathbf{ABC}$. Аналогічно визначають натуральну величину будь-якої плоскої фігури.

Площина **Σ** у системі ($\mathbf{\Pi_4 \perp \Pi_5}$) є площиною рівня. Якщо треба побудувати в площині **Σ** яку-небудь фігуру, то виконати цю побудову в площині загального положення важко. У цьому випадку проводяться побудови, показані на рис. 4.7. На $\mathbf{\Pi_5}$ будують натуральну величину фігури. Потім добудовують інші проекції цієї фігури. На рис. 4.7 по проекції $\mathbf{D_5}$ (одна точка натуральної величини фігури) знайдені інші проекції цієї точки. Проекція $\mathbf{D_4}$ належить прямій, у яку проектується площина **Σ**. Послідовність побудов показана стрілками. Правило заміни площин проекцій справедливе і в цьому випадку. Рівні відрізки позначені однаково. Таким способом можна побудувати, наприклад, коло, вписане у трикутник **ABC**. На площині $\mathbf{\Pi_5}$ будуємо коло, вписане в трикутник $\mathbf{A_5B_5C_5}$, а потім добудовуємо інші проекції ряду точок кола так само, як для точки $\mathbf{D_5}$. Горизонтальна і фронтальна проекції цього кола - еліпси.

У випадку, коли дано проектуючу площину, побудов, пов'язаних з натуральною величиною фігури, звичайно, менше, тому що площина вже проектується в пряму лінію. На рис.4.8 показана побудова квадрата, що належить горизонтально проектуючій площини.

Нехай дано горизонтально проектуючу площину $\mathbf{\Sigma(\Sigma_1)}$ і дві точки цієї площини $\mathbf{A(A_1, A_2)}$ і $\mathbf{B(B_1,B_2)}$. Необхідно побудувати квадрат **ABCD** у площині **Σ**.

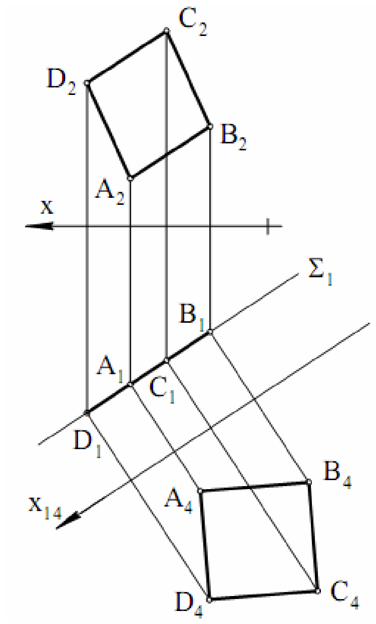


Рис. 4.8

З'єднаємо відрізками проекції A_2,B_2 і A_1,B_1. Одержали проекції сторони квадрата. Вводимо площину $\Pi_4 \| \Sigma_1$ ($x_{14} \| \Sigma_1$).

Будуємо нову проекцію A_4B_4. Добудовуємо до відрізка A_4B_4 квадрат $A_4B_4C_4D_4$. Проекції C_1 і D_1 належать Σ_1. Проекції C_2 і D_2 будуємо за правилами заміни площин проекцій. У цієї задачі є друге рішення – квадрат, симетричний побудованому відносно прямої (**AB**). Це друге рішення можна побудувати, не користуючись проекцією на площину Π_4 відразу на площинах Π_2 і Π_1.

2. СПОСІБ ОБЕРТАННЯ

Як відомо, при обертанні деякої точки навколо осі вона рухається в площині, перпендикулярній до осі обертання, і описує коло. Для застосування способу обертання з метою перетворення креслення відзначимо наступні чотири елементи (рис. 4.9):

- вісь обертання (**MN**);
- площина обертання точки (пл. **S** перпендикулярна (**MN**));
- центр обертання (**O**; пл. **S** перетинає (**MN**)=**O**);
- радіус обертання (**R** ;**R**=|**OA**|).

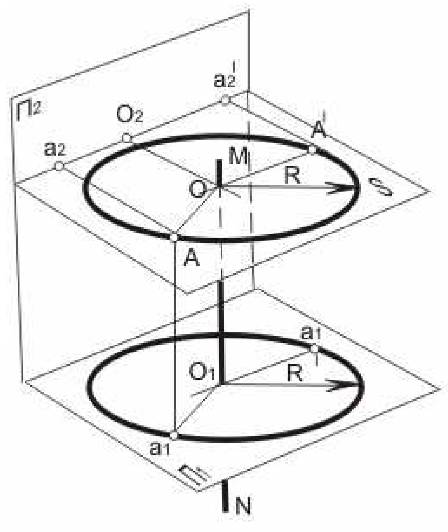


Рис. 4.9

Як вісь обертання звичайно використовують прями , які перпендикулярні або паралельні площинам проекцій. При обертанні точки навколо вертикальної осі, її горизонтальна проекція переміщується по колу, а фронтальна проекція - паралельна осі **X**, тобто перпендикулярна до осі обертання.

Обертання точки **A** на кресленні щодо осі **MN**, перпендикулярної до площини Π_1.

При обертанні точки навколо горизонтальної осі її фронтальна проекція буде переміщуватися по колу , а горизонтальна - паралельно осі **X** .

Обертання точки А на кресленні відносно осі MN, перпендикулярної до площини Π_1, показане на рис. 4.10.

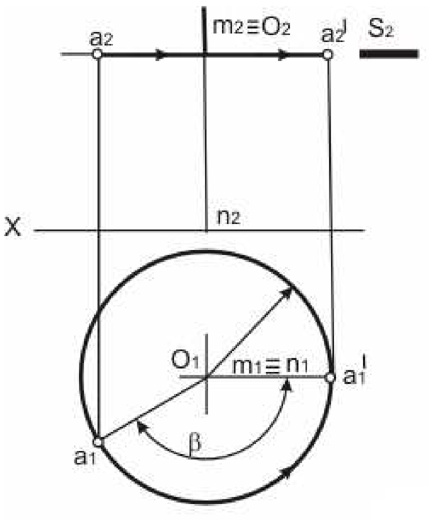


Рис. 4.10

Площина обертання S_2 паралельна площині Π_1 і на фронтальній проекції зображена слідом S_2. Горизонтальна проекція O_1 центра обертання **O** збігається із проекцією m_1n_1 осі, а горизонтальна проекція O_1a_1 радіуса обертання **ОА** є його натуральною величиною. Поворот точки **А** на рис. 4.10 зроблений на кут **β** проти годинникової стрілки так, щоб у новому положенні точки із проекціями a'_2, a'_1 радіус обертання був паралельний площині Π_2. При обертанні точки навколо вертикальної осі її горизонтальна проекція переміщується по колу, а фронтальна проекція – паралельна осі **X і** перпендикулярна до осі обертання.

Якщо точку обертати навколо осі, перпендикулярної до площини Π_2, то її фронтальна проекція буде переміщуватися по колу, а горизонтальна - паралельно осі **X**.

Обертання точки навколо проектуючої прямої застосовують при вирішенні деяких задач, наприклад при визначенні натуральної величини відрізка прямої. Для цього (рис. 4.11) досить вісь обертання із проекціями m_1n_1, m_2n_2 вибрати так , щоб вона проходила через одну з крайніх точок відрізка, наприклад точку із проекціями b_2, b_1. Тоді при повороті точки **А** на кут **β** у положення **A′** ($OA' \parallel$ пл. Π_2, $o_1a'_1 \parallel$ осі **X**) відрізок **АВ** переміщується в положення **A′В**, паралельне площині Π_2 і, отже, проектується на неї в натуральну величину. Одночасно в натуральну величину буде проектуватися кут **α** нахилу відрізка **АВ** до площини Π_1.

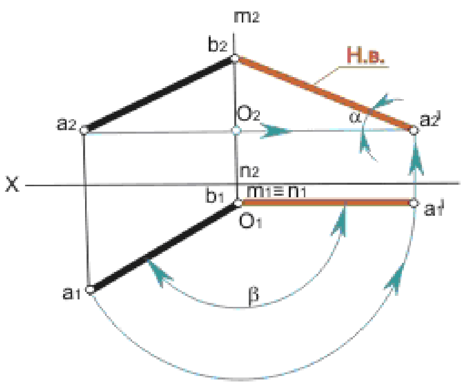


Рис. 4.11

2.1. Застосування способу обертання без вказівки на кресленні осей обертання, перпендикулярних до площин проекцій

Якщо обертати геометричну фігуру навколо осі, перпендикулярної до площини проекцій, то проекція на цій площині не змінюється ні за видом, ні за величиною (міняється лише положення проекції щодо осі проекцій). Проекції точок геометричної фігури на площині, паралельній осі обертання, переміщуються по прямих, паралельних осі проекції (за винятком проекцій точок, розташованих на осі обертання), і проекція в цілому змінюється за формою і величиною. Тому можна застосовувати спосіб обертання, не задаючись зображенням осі обертання. У цьому випадку, не змінюючи величини і форми однієї із проекцій геометричного образа, переміщують цю проекцію в необхідне положення, а потім будують іншу проекцію так, як зазначено вище.

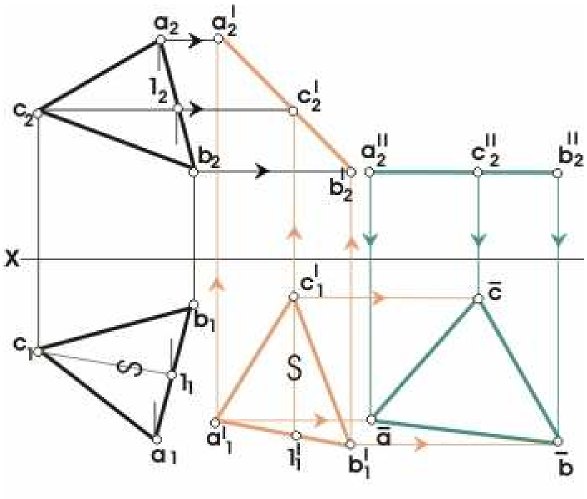


Рис. 4.12

На рис. 4.12 показане застосування способу обертання без вказівки осей для визначення натуральної величини трикутника **ABC**, заданого проекціями $\mathbf{a_1b_1з_1}$, $\mathbf{a_2b_2з_2}$. Для цього виконано два повороти площини загального положення, в якій розташований трикутник так, щоб після першого повороту ця площина стала перпендикулярною до площини $\mathbf{П_2}$, а після другого - паралельна площині $\mathbf{П_1}$.

Застосування способу обертання без вказівки осей трохи спрощує побудови, при цьому не відбувається накладення однієї проекції на іншу, але креслення займає більшу площу.

2.2.Спосіб обертання навколо прямих, паралельних площинам проекцій

Натуральну величину плоскої фігури можна визначити обертанням навколо осі, паралельної площині проекцій, одним поворотом привівши фігуру в положення, паралельне площині проекцій. На рис. 4.13 показане визначення величини трикутника з проекціями $a_1b_1c_1$, $a_2b_2c_2$ обертанням навколо горизонталі. При цьому всі точки трикутника (за винятком лежачих на осі обертання) обертаються навколо осі по колах у площинах, перпендикулярних до осі. Якщо трикутник займе положення, паралельне до площини проекцій, радіуси обертання його точок виявляться паралельними цій площині, тобто будуть проектуватися на площину в натуральну величину.

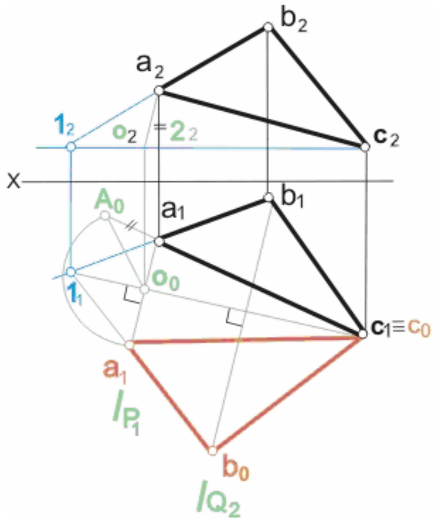


Рис. 4.13

Якщо потрібно повернути плоский геометричний образ до положення, паралельного площині $П_2$, то за вісь обертання вибирають фронталь.

2.3. Спосіб суміщення

Поворот площини навколо її сліду до суміщення з відповідною площиною проекцій (спосіб суміщення). Якщо площину обертати навколо її сліду до суміщення із площиною проекцій, в якій розташований цей слід, то геометричні образи, розташовані в площині, зобразяться без спотворення. Цей спосіб є окремим випадком обертання навколо горизонталі або фронталі, тому що горизонтальний слід площини можна розглядати як горизонталь площини, а фронтальний слід - як фронталь площини.

На рис. 4.14 показане наочне зображення повороту площини загального положення **P** навколо горизонтального сліду $\mathbf{P_1}$ в напрямку від площини $\mathbf{П_2}$ до спостерігача і до суміщення з площиною $\mathbf{П_1}$. У положенні суміщення площини **P** із площиною $\mathbf{П_1}$ пряма $\mathbf{P_0}$ являє собою слід $\mathbf{P_2}$, суміщений із площиною $\mathbf{П_1}$. Слід $\mathbf{P_1}$ як вісь обертання не змінює свого положення.

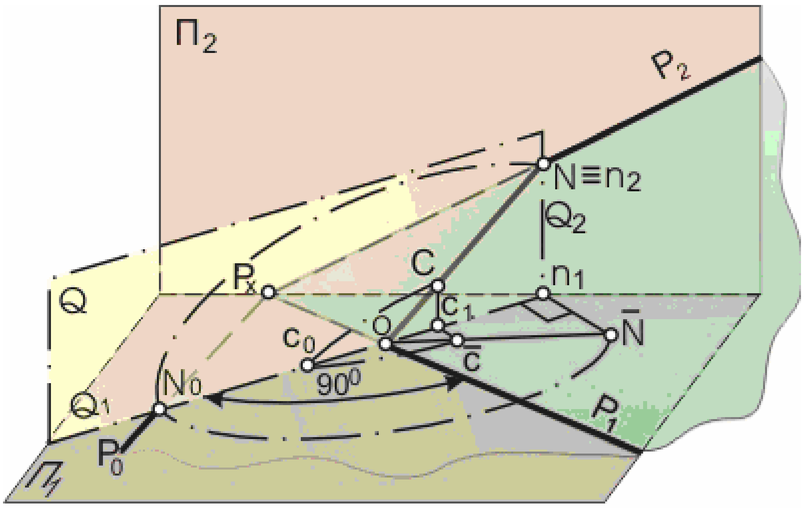


Рис. 4.14

Точка $\mathbf{P_x}$ перетину слідів також не змінює свого положення. Для побудови суміщеного положення $\mathbf{P_0}$ сліду $\mathbf{P_2}$ досить знайти ще одну точку, наприклад точку **N**, цього сліду (крім точки $\mathbf{P_x}$) у положенні, суміщеному із площиною $\mathbf{П_1}$.Точка **N** опише дугу в площині **Q**, перпендикулярної до осі обертання. Центр **O** цієї дуги є точкою перетину площини Q зі слідом $\mathbf{P_1}$. Точка $\mathbf{N_0}$ на площині $\mathbf{П_1}$ є точкою перетину дуги радіуса **ON** у площині **Q** зі слідом $\mathbf{Q_1}$. Провівши через $\mathbf{P_x}$ і $\mathbf{N_0}$ пряму, одержимо $\mathbf{P_0}$. Відрізок $\mathbf{P_xN}$ не змінює своєї довжини при обертанні площини; тому точку $\mathbf{N_0}$ можна одержати при перетині $\mathbf{Q_1}$ з дугою, описаною в площині $\mathbf{П_1}$, із точки $\mathbf{P_x}$ радіусом $\mathbf{P_xN}$.

Для виконання розглянутих побудов на кресленні (рис. 4.15) на сліді $\mathbf{P_2}$ обрана довільна точка **N** (вона збігається зі своєю проекцією $\mathbf{n_2}$). Через її горизонтальну проекцію $\mathbf{n_1}$ проведена пряма $\mathbf{n_1o}$, перпендикулярна до осі обертання - сліду $\mathbf{P_1}$. На цій прямій знайдена точка $\mathbf{N_o}$, тобто точка **N** після суміщення із площиною $\mathbf{\Pi_1}$. Вона знайдена на відстані $\mathbf{P_xN_o= P_xn_2}$ від точки $\mathbf{P_x}$ або на відстані $\mathbf{ON_o}$ від точки **O**, рівній радіусу обертання точки **N**. Довжина радіуса $\mathbf{ON_o}$ визначена, наприклад, як гіпотенуза прямокутного трикутника з катетами $\mathbf{On_1}$ і $\mathbf{n_1N/(n_1N = n_1n_2})$. Пряма $\mathbf{P_o}$, що проходить через точки $\mathbf{P_x}$ і $\mathbf{N_o}$- суміщене положення сліду P_2.

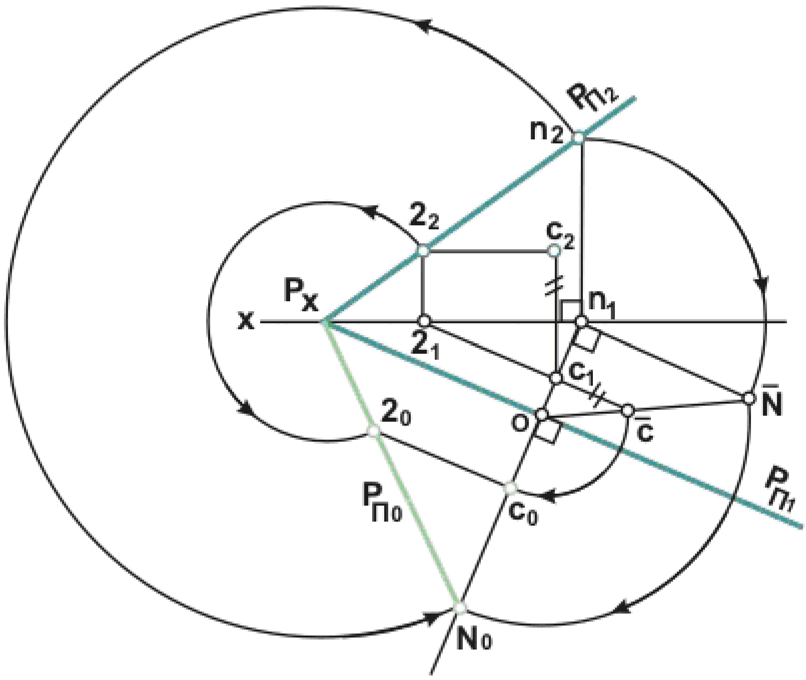


Рис. 4.15

Якщо потрібно сумістити площину з фронтальною площиною проекцій, то обертати площину треба навколо її фронтального сліду.

ЛЕКЦІЯ №5. МЕТРИЧНІ ЗАДАЧІ. ВИЗНАЧЕННЯ ВІДСТАНЕЙ І КУТІВ

1. ВИЗНАЧЕННЯ ВІДСТАНЕЙ

Розглянемо тільки визначення відстаней, оскільки НВ (натуральна величина) плоскої фігури була розглянута в попередній лекції.

1.1. Відстань від точки до фігури (точки, прямої, площини)

Наведемо відомості з планіметрії, необхідні для вирішення зазначених задач.

1) Довжина відрізка є відстань між його кінцями.

2) Із точки, що не лежить на прямій, можна провести перпендикуляр до цієї прямої і до того ж тільки один.

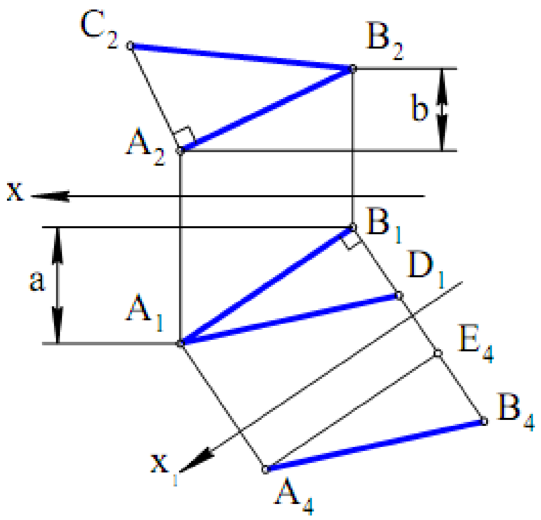


Рис. 5.1

Задача. Визначити довжину відрізка **AB** (рис. 5.1). У лекції № 4 було наведене вирішення цієї задачі методом заміни площин проекцій. Розглянемо інше вирішення – вирішення **методом прямокутного трикутника**. Його обґрунтування виконаємо, спираючись на зазначений метод заміни. Виконуючи вирішення даної задачі методом заміни, одержимо $\mathbf{A_4B_4}$ – шукану довжину. Бачимо, що відповідно до методу заміни $\mathbf{E_4B_4 = b}$. Тому, відклавши на лінії $\mathbf{B_1B_4 \perp x_1}$ від точки $\mathbf{B_1}$ відрізок $\mathbf{B_1D_1 = E_4У_4 = b}$, одержимо прямокутний трикутник $\mathbf{A_1B_1D_1}$, в якому $\mathbf{A_1D_1 = A_4B_4}$,тобто довжина гіпотенузи $\mathbf{A_1D_1}$ є шукана довжина. Отже довжину відрізка **AB** можна визначити на площині проекцій $\mathbf{П_1}$ використовуючи відстань **b**, взяту на площині проекцій $\mathbf{П_2}$. При цьому заміна площин проекцій з віссю $\mathbf{x_1}$ не потрібна. Аналогічно можна визначити шукану довжину на площині $\mathbf{П_2}$. Для цього вибудовуємо прямокутний трикутник $\mathbf{B_2A_2C_2}$, в якого $\mathbf{C_2A_2 = a}$, де **a** визначено на $\mathbf{П_1}$. У підсумку одержуємо $\mathbf{B_2C_2 = B_1C_1}$ – шукана довжина відрізка **AB**. Зрозуміло, що необхідно будувати лише один з двох наведених прямокутних трикутників.

Задача. Дано пряму **AB** і точку **E** поза прямою (рис. 5.2). Треба визначити відстань ρ (**E**, **AB**).

Проекційний алгоритм вирішення може бути наступним:

1) методом заміни площин проекцій визначаємо довжину відрізку **AB**.

На Π_4 вона дорівнює A_4B_4 ;

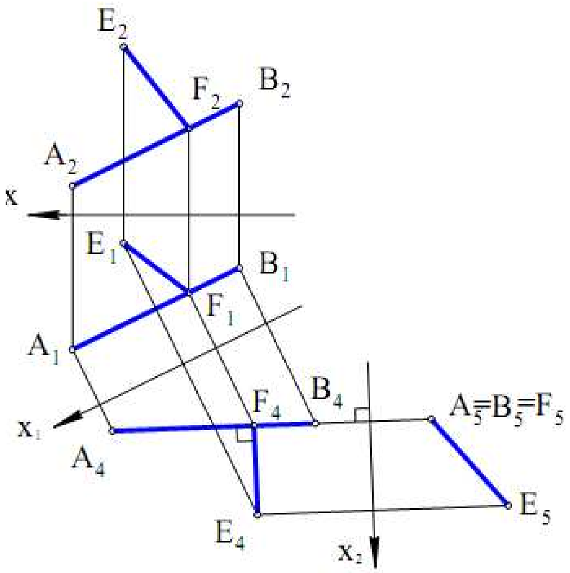


Рис. 5.2

2) будуємо додаткову на Π_4 проекцію E_4 точки **E**;

3) вводимо нову систему площин проекцій $\Pi_4 \perp \Pi_5$ таку, що її вісь проекцій x_2 перпендикулярна до A_4B_4;

4) на Π_5 будуються додаткові проекції відрізка **AB** і точки **E**. Проекціями будуть відповідно точки $A_5 = B_5$ і E_5.

Відстань $\rho(F_5, E_5)$ є шуканою відстанню між даними прямою і точкою. Повертаємо послідовно проекції відрізка **EF** на Π_4, Π_1, Π_2. Для цього проводимо спочатку $E_4F_4 \| x_2$, а потім будуємо: $(F_5, F_4) \Rightarrow F_1$;$(F_4 , F_1) \Rightarrow F_2$.

У підсумку одержуємо E_1F_1, E_2F_2 –основні проекції відрізка **EF**, довжина якого є шукана відстань. Необхідно відзначити, що коли не враховувати отримані побудови на Π_5, ті побудови на Π_2, Π_1 і Π_4, що залишилися, відповідають вирішенню задачі про проведення прямої **EF** через дану точку **E**, що перетинає під 90° дану пряму **AB**.

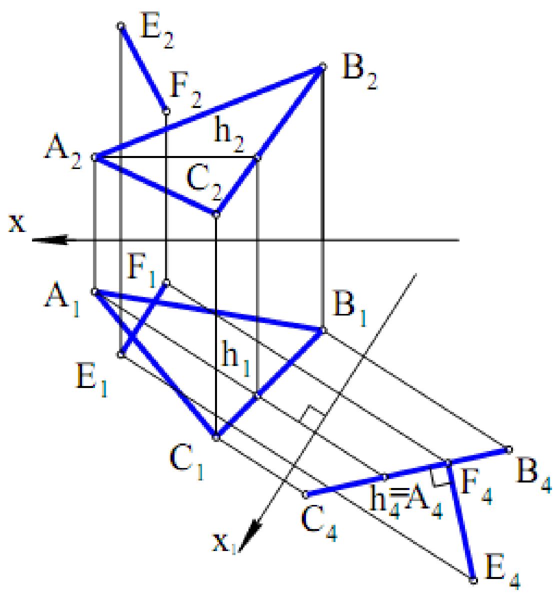


Рис. 5.3

Задача. Дано площину **Σ** (**ΔABC**) і точку **E**. Визначити відстань від точки **E** до площини **Σ** (рис. 5.3).

Вирішення задачі може бути виконано методом заміни площин проекцій. Проекційний алгоритм вирішення в цьому випадку наступний:

1) у площині **Σ** будуємо лінію рівня, наприклад $h(h_1, h_2)$, так, що $h_2 \| x$;

2) вводимо нову систему площин проекцій $\Pi_1 \perp \Pi_4$ з віссю x_1 так, що $x_1 \perp h_1$;

3) на Π_4 будуємо додаткові проекції заданих фігур – B_4C_4 для **ΔABC** і E_4 для точки **E**;

4) довжина перпендикуляра E_4F_4 є шуканою відстанню $\rho(E, \Sigma)$.

Для повноти рішення будуємо проекції відрізка **EF** на основних площинах проекцій. Для цього спочатку будуємо $E_1F_1 \| x_1$, а потім $(F_4, F_1) \Rightarrow F_2$; E_2F_2, E_1F_1 – основні проекції відрізка **EF** довжини ρ.

1.2. Визначення відстані між паралельними фігурами

Задача. Дано паралельні прямі **AB** і **CD**. Визначити відстань між цими прямими (рис. 5.4).

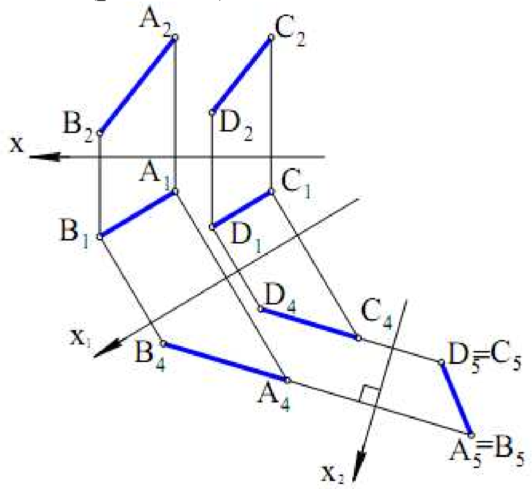


Рис. 5.4

Вирішення задачі виконаємо методом заміни площин проекцій. Для цього спочатку введемо нову систему площин проекцій $\Pi_1 \perp \Pi_4$ з віссю проекцій $x_1 \| A_1У_1$ і визначимо НВ відрізків **AB** і **CD**. Одержимо A_4B_4 = **НВ** відрізка **AB**, D_4C_4 = **НВ** відрізка **DC**. Потім введемо нову систему площин проекцій $\Pi_4 \perp \Pi_5$ з віссю $x_2 \perp A_4B_4$ і побудуємо точки $D_5 = C_5$ **і** $A_5 = B_5$, які будуть виродженими проекціями відрізків **AB** і **CD**. Шуканою відстанню ρ(**AB, CD**) буде $\rho(A_5, D_5)$. Залишається побудувати основні проекції відрізка довжини ρ. Цю частину вирішення задачі пропонується виконати самостійно.

Задача. Дано паралельні фігури: пряму **a** і площину **Σ**. Визначити відстань між **a** і **Σ** (рис. 5.5).

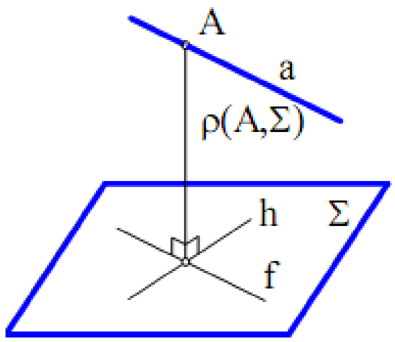


Рис. 5.5.

Для вирішення задачі необхідно взяти на прямій **a** довільну точку **A** і визначити відстань ρ(**A, Σ**).

Тому що ρ(**a, Σ**) = ρ(**A, Σ**)то відстань ρ(**A, Σ**) буде рішенням даної задачі.

Визначення відстані ρ(**A, Σ**). було показано раніше.

Задача. Дано паралельні площини **Σ** і **Δ**. Знайти відстань між **Σ** і **Δ** (рис. 5.6).

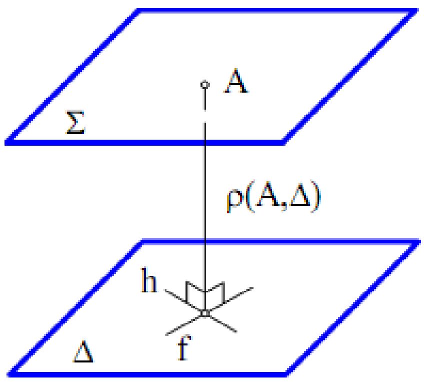


Рис. 5.6

Для вирішення задачі необхідно взяти на одній із площин, наприклад **Σ**, точку **A** і визначити відстань ρ(**A, Δ**). Тому що ρ(**Σ, Δ**) = ρ(**A, Δ**) то знайдена відстань ρ(**A, Δ**) буде рішенням задачі.

1.3. Визначення відстані між мимобіжними прямими

Наведемо без доказів відомості зі стереометрії, необхідні для вирішення названої задачі.

1) Загальним перпендикуляром двох мимобіжних прямих називається відрізок, кінці якого лежать на даних прямих і який перпендикулярний до них.

2) Загальний перпендикуляр двох мимобіжних прямих існує і єдиний.

3) Відстань між мимобіжними прямими дорівнює довжині їхнього загального перпендикуляра.

Задача. Дано мимобіжні прямі **AB** і **CD**. Визначити відстань між прямими (рис. 5.7).

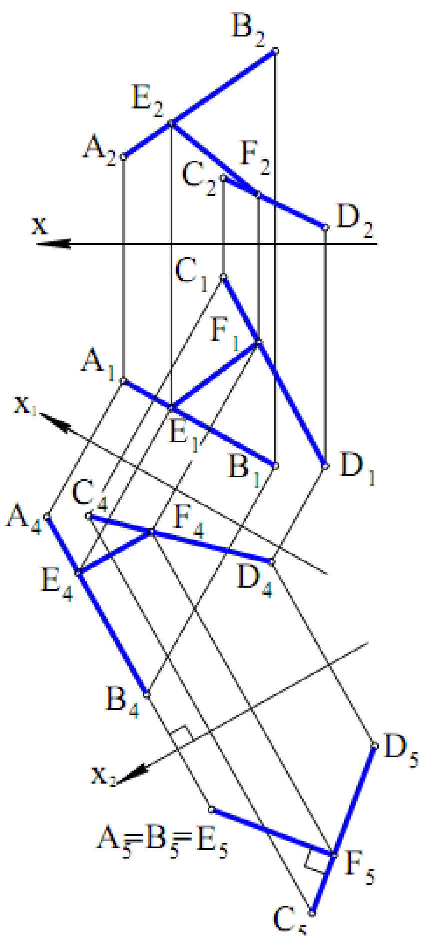


Рис. 5.7

Вирішення задачі виконаємо методом заміни площин проекцій. Проекційний алгоритм рішення в цьому випадку може бути наступним:

1) вводимо нову систему площин проекцій $\mathbf{П_1 \perp П_4}$, таким чином, що $\mathbf{П_4 \parallel AB}$, тобто на КЧ будується вісь $\mathbf{x_1 \parallel A_1B_1}$;

2) на $\mathbf{П_4}$ будуємо нові проекції $\mathbf{A_4B_4}$ (НВ відрізки **AB**) і $\mathbf{C_4D_4}$;

3) вводимо нову систему площин $\mathbf{П_4 \perp П_5}$ з віссю $\mathbf{x_2 \perp A_4B_4}$ така, що $\mathbf{П_5 \perp AB}$;

4) на $\mathbf{П_5}$ будуємо нові проекції – відрізок $\mathbf{C_5D_5}$ і точка $\mathbf{A_5 = B_5}$;

5) будуємо перпендикуляр $\mathbf{E_5F_5 \perp C_5D_5}$ із точки $\mathbf{E_5(= A_5 = B_5)}$;

У підсумку, за змістом побудов у методі заміни площин проекцій і наведеному поняттю, відстані між мимобіжними прямими одержуємо, як $\boldsymbol{\rho}(\mathbf{E_5, C_5D_5}) = \boldsymbol{\rho}(\mathbf{AB, CD})$. Для повноти вирішення задачі необхідно повернути відрізок **EF** довжиною $\rho(\mathbf{AB, CD})$ на вихідні площини проекцій:

1) будуємо $\mathbf{E_4F_4 \parallel x_2}$;

2) будуємо $\mathbf{E_1F_1}$ по проекціях $\mathbf{E_5F_5}$, $\mathbf{E_4F_4}$; $\mathbf{E_2F_2}$ по проекціях $\mathbf{E_4F_4}$, $\mathbf{E_1F_1}$. Відрізки $\mathbf{E_2F_2}$, $\mathbf{E_1F_1}$ являють собою основні проекції відрізка **EF**.

У стереометрії відомо ще одне визначення розглянутої відстані: **відстань між мимобіжними прямими дорівнює відстані між паралельними площинами, проведеними через ці прямі.** Таке визначення відстані дозволяє запропонувати більш короткий шлях вирішення розглянутої задачі.

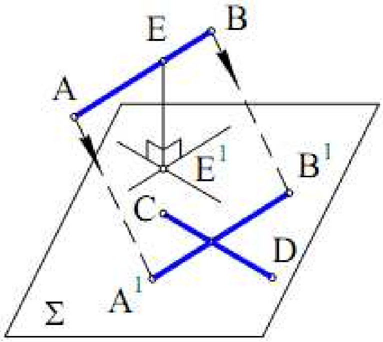


Рис. 5.8

Нехай **AB** і **CD** – мимобіжні прямі (рис. 5.8). Перемістимо у просторі пряму **AB** паралельно самої собі в положення **AB** до перетину з **CD**. Якщо взяти тепер на прямій **AB** будь-яку точку **E** і опустити з цієї точки перпендикуляр Π_1 на площину, що утворилася Σ(**CD**, A_1B_1), то довжина цього перпендикуляра буде шуканою відстанню ρ(**AB,CD**).
Розглянемо проекційне рішення задачі.

Задача. Дано мимобіжні прямі **AB** і **CD** (рис. 5.9). Визначити відстань між ними.

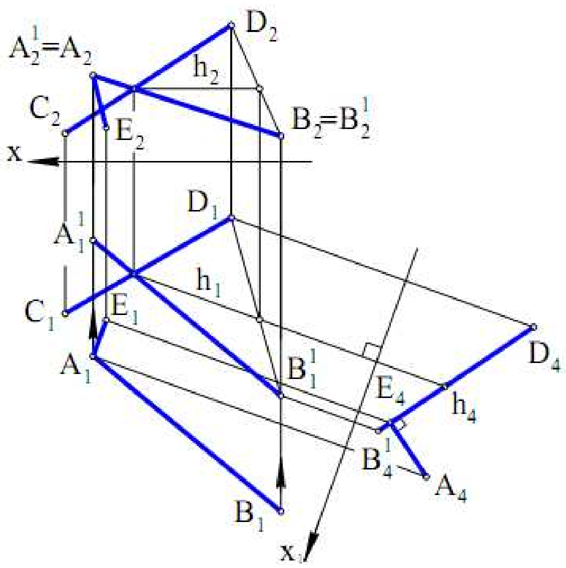


Рис. 5.9

Вирішення задачі може бути наступним:
1) Перенесемо пряму **AB** паралельно самій собі до перетину з **CD**. Таких переносів може бути нескінченна множина. Один з переносів, наприклад $A_1B_1 \rightarrow A^1{}_1B^1{}_1$, $A_2B_2 = A^2{}_1B^2{}_1$- найбільш простий для даного КК варіант.
2) Одержуємо нові умови задачі: задана площина Σ (A_1B_1, **CD**), де $A_1B_1 \cap$ **CD** і точка **A**; потрібно визначити відстань ρ(**A**, Σ). Вирішення задачі виконуємо методом заміни площин проекцій за раніше викладеною схемою проекційного рішення.

2. ВИЗНАЧЕННЯ КУТІВ МІЖ ФІГУРАМИ

Фігури простору: прямі лінії, площини, прямі й площини можуть утворювати між собою кути - геометричні фігури з відповідним цим фігурам величинами. Розглянемо найбільш поширені випадки, що часто зустрічаються в нарисній геометрії.

2.1. Кути між прямими

Наведемо відомі зі шкільного курсу стереометрії поняття і визначення, необхідні для вирішення наступних метричних задач:

1) плоский кут - фігура, утворена двома променями із загальним початком і однієї із плоских областей, обмеженої ними;

2) кут між пересічними прямими - величина найменшого з плоских кутів, утворених цими прямими;

3) кут між мимобіжними прямими - це кут між пересічними прямими, паралельними даним мимобіжним прямим.

В останньому визначенні величина кута між двома мимобіжними прямими не залежить від вибору пари пересічних прямих, паралельних їм. Розглянемо кілька задач на визначення кутів.

Задача. Дано пересічні відрізки **AB** і **AC** (рис. 5.10). Визначити кут між ними.

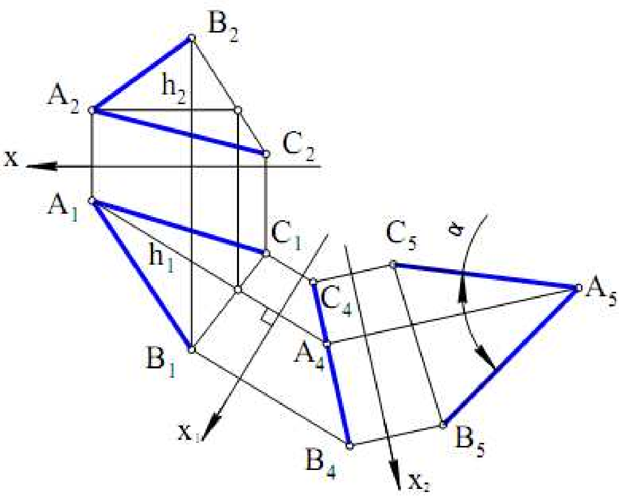


Рис. 5.10

Оскільки шуканий кут є плоскою фігурою, то вирішення задачі зводиться до визначення НВ плоскої фігури. Її проекційне рішення викладене в **п. 1**.

Нагадаємо алгоритм цього рішення. Він заснований на методі заміни площин проекцій і стосовно до умов даної задачі може бути наступним:

1) будуємо лінію рівня, наприклад, $\mathbf{h(h_1,h_2)}$, що належить площині $\mathbf{\Sigma(AB, AC)}$, при цьому $\mathbf{h_2 \parallel x}$;

2) будуємо вісь проекції $\mathbf{x_1 \perp h_1}$, що відповідає введенню у просторі нової системи площин проекцій $\mathbf{\Pi_1 \perp \Pi_4}$, де $\mathbf{\Pi_4 \perp h}$;

3) на $\mathbf{\Pi_4}$ будуємо вироджену проекцію $\mathbf{B_4C_4}$ площини $\mathbf{\Sigma}$;

4) будуємо вісь проекції $\mathbf{x_2 \parallel B_4C_4}$, що відповідає введенню у просторі нової системи площин проекцій $\mathbf{\Pi_4 \perp \Pi_5}$, де $\mathbf{\Pi_5 \parallel \Sigma}$;

5) на $\mathbf{\Pi_5}$ будуємо кут $\cdot\mathbf{(A_5C_5, A_5B_5) = \alpha}$, що і є шуканим.

Задача. Дано дві мимобіжні прямі **AB** і **CD** (рис. 5.11). Визначити кут між ними.

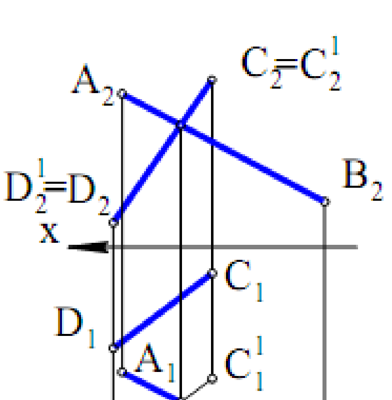


Рис. 5.11

Рішення задачі виконаємо, опираючись на визначення кута між мимобіжними прямими, наведене вище, а також з огляду на алгоритм проекційного рішення попередньої задачі. Для цих цілей перемістимо одну з прямих, наприклад **DC**, у положення, коли вона, залишаючись паралельною сама до себе, буде перетинати іншу пряму **AB**. Таких положень існує незліченна множина. Одне з них, наприклад $\mathbf{D_1C_1(D^1{}_1C^1{}_1, D^2{}_1C^2{}_1)}$, де $\mathbf{D^1{}_1C^1{}_1 \parallel D_1C_1}$, $\mathbf{D^2{}_1C2_1 = D_2C_2}$, показане на КК (див. рис. 5.11).

У підсумку одержуємо пару пересічних прямих **AB** ∩ $\mathbf{D_1C_1}$, кут між якими може бути визначений на підставі вищенаведеного алгоритму.

Цю частину вирішення задачі рекомендуємо виконати самостійно.

Розглянемо ще одне проекційне вирішення даної задачі. Зміст його полягає в побудові такої додаткової площини проекцій, на якій ортогональні проекції заданих мимобіжних прямих є пересічні прямі, відповідно паралельні цим мимобіжним прямим. Кут між такими ортогональними проекціями є шуканим. Зазначена площина проекцій перпендикулярна до прямої найкоротшої відстані між заданими мимобіжними прямими.

Задача. Дано мимобіжні прямі **AB** і **CD**. Визначити кут між ними (рис. 5.12).

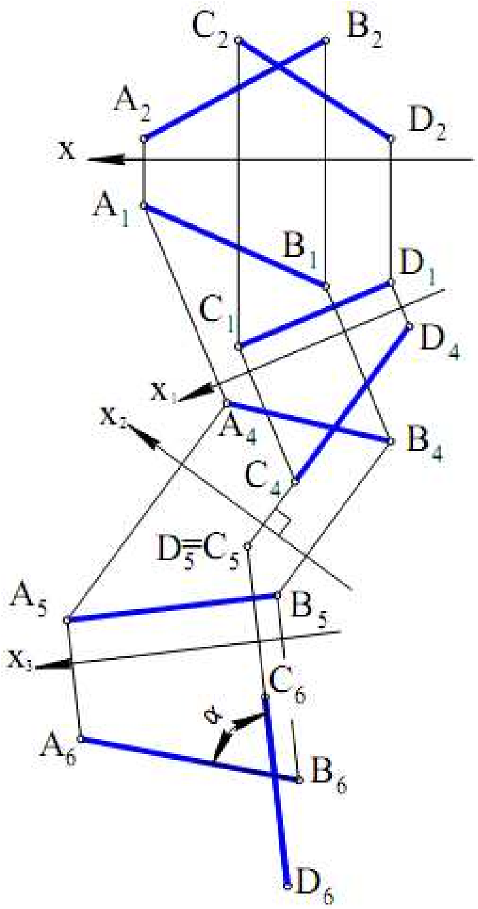


Рис. 5.12

Проекційне вирішення цієї задачі, відповідно до запропонованої вище схеми, буде наступним:

1) будуємо вісь проекції $\mathbf{x_1} \| \mathbf{C_1D_1}$ (**x1** можна будувати паралельно кожної із чотирьох ортогональних проекцій прямих **AB** і **CD**), що разом із площинами $\mathbf{\Pi_1 \perp \Pi_4}$ утворить нову систему площин проекцій, таку, що $\mathbf{\Pi_4 \| CD}$;

2) на $\mathbf{\Pi_4}$ будуємо додаткові проекції $\mathbf{A_4B_4}$, $\mathbf{C_4D_4}$ прямих **AB** і **CD**, при цьому $\mathbf{C_4D_4}$ є НВ відрізка **CD**;

3) будуємо вісь проекції $\mathbf{x_2 \perp C_4D_4}$, що разом з $\mathbf{\Pi_4 \perp \Pi_5}$ утворить нову систему площин проекцій, таку, що $\mathbf{\Pi_5 \perp CD}$;

4) на $\mathbf{\Pi_5}$ будуємо додаткові проекції $\mathbf{A_5B_5}$ і $\mathbf{C_5 = D_5}$ прямих **AB** і **CD**;

5) будуємо вісь проекції $\mathbf{x_3 \| A_5B_5}$, що разом з $\mathbf{\Pi_5 \perp \Pi_6}$ утворить нову систему площин проекцій, таку, що $\mathbf{\Pi_6 \| AB}$;

6) на $\mathbf{\Pi_6}$ будуємо додаткові проекції $\mathbf{A_6B_6}$ і $\mathbf{C_6D_6}$, що представляють собою НВ прямих **AB** і **CD**, які утворюють між собою кут $\boldsymbol{\alpha}$, що і є рішенням задачі.

2.2. Кут між прямою і площиною

Визначення. **Кутом між похилою прямою і площиною називається кут між похилою і її ортогональною проекцією на цю площину**. Якщо пряма паралельна площині або лежить у ній, то кут між прямою і площиною приймається рівним нулю. У випадку перпендикулярності прямої і площини кут між ними за визначенням дорівнює 90°. Необхідно, щоб кут між прямою і площиною укладався у межах $\mathbf{0 \le \alpha \le 90}$.

Задача. Дано пряму DE (рис. 5.13) і площину Σ(ΔABC). Знайти кут між ними.

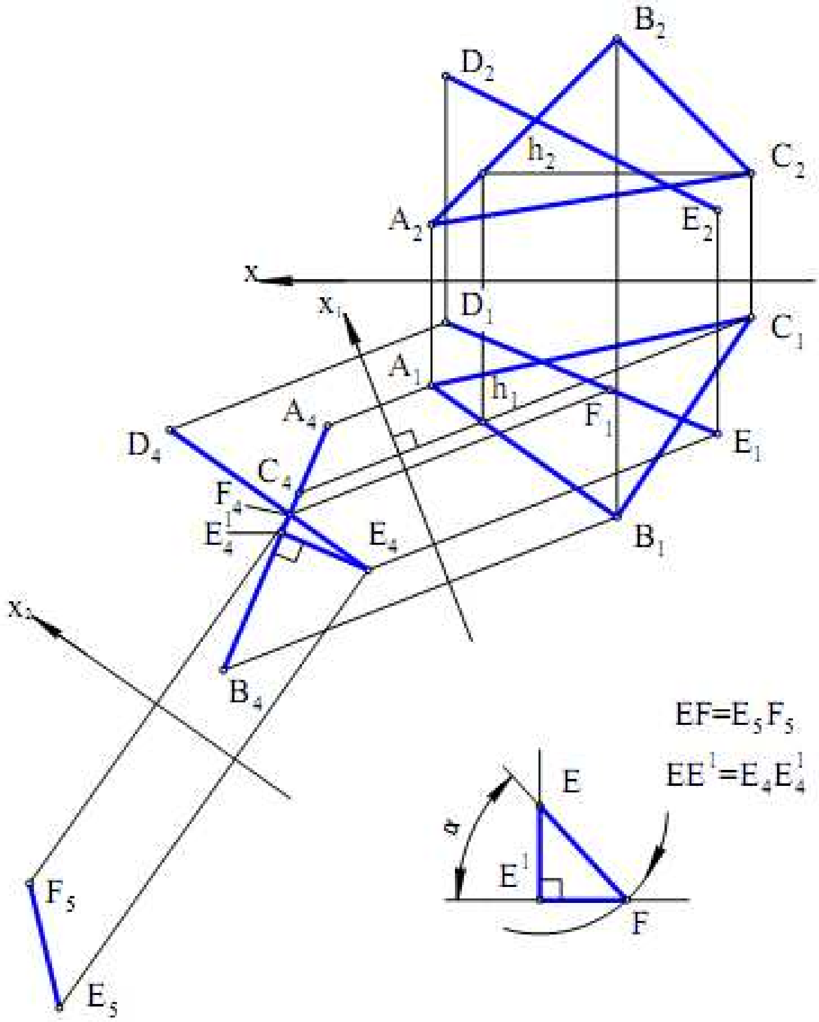


Рис.5.13

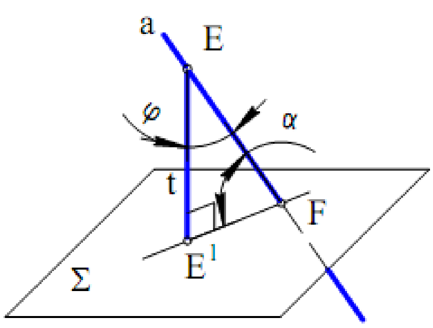


Рис. 5.14

Проекційне вирішення задачі ґрунтується на побудові прямокутного трикутника $\mathbf{EE_1F}$ (рис. 5.14), в якому: **EF** – гіпотенуза на заданій похилій **a**, при цьому **E** – довільна точка, **F = a ∩ Σ**, **Σ** – задана площина; $\mathbf{E_1F}$ – катет на площині **Σ**, що являє собою ортогональну проекцію відрізка **EF**; $\alpha = \angle(\mathbf{EF}, \mathbf{FE_1})$ є шуканий кут.

Розглянемо алгоритм проекційного рішення, який представлений на рис. 5.13.

1) У площині **Σ** вибираємо лінію рівня, наприклад, горизонталь $\mathbf{h(h_1, h_2)}$. При цьому $\mathbf{h_2 \parallel x}$.

2) Вводимо нову систему площин проекцій $\mathbf{\Pi_1 \perp \Pi_4}$ з віссю $\mathbf{x_1 \perp h_1}$, така, що $\mathbf{\Pi_4 \perp h}$.

3) На $\mathbf{\Pi_4}$ будуємо вироджену проекцію $\mathbf{A_4B_4}$ площини $\mathbf{\Sigma}$ і додаткова проекція $\mathbf{D_4E_4}$ прямої **DE**.

4) Визначаємо додаткові проекції $\mathbf{F_4}$ і $\mathbf{F_1}$ точки перетину $\mathbf{F = a \cap \Sigma}$, при цьому $\mathbf{E_1F_1}$, $\mathbf{E_4F_4}$ – проекції гіпотенузи **EF** у прямокутному трикутнику $\mathbf{EE^1F}$.

5) Будуємо перпендикуляр $\mathbf{E_4E_4^1 \perp A_4B_4}$, при цьому $\mathbf{E_4E_4^1 = EE^1}$– катет прямокутного трикутника $\mathbf{EE^1F}$.

6) Введенням системи площин проекцій $\mathbf{\Pi_4 \perp \Pi_5}$ з віссю $\mathbf{x_2 \parallel E_4F_4}$ і $\mathbf{\Pi_5 \parallel EF}$ визначаємо НВ гіпотенузи **EF**, рівна $\mathbf{E_5F_5}$.

7) Осторонь від проекційних побудов на КК будуємо прямокутний трикутник $\mathbf{EE^1F}$ по катеті $\mathbf{EE^1}$ і гіпотенузі **EF**.

Кут $\boldsymbol{\alpha}$ = ·($\mathbf{E^1F, EF}$) є шуканим.

Розглянемо ще одне проекційне рішення, засноване на трикутнику $\mathbf{EE^1F}$.

Задача. Дано пряму **a** і площину $\mathbf{\Sigma(\Delta ABC)}$. Визначити кут між ними (рис. 5.15).

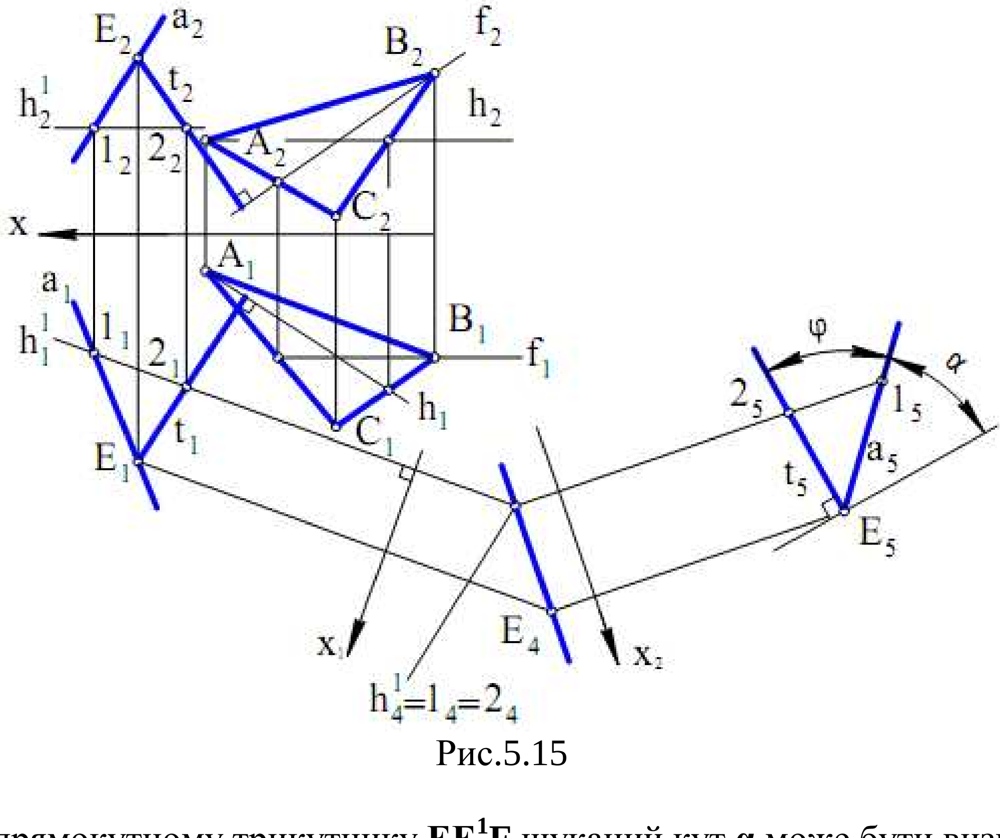


Рис.5.15

У прямокутному трикутнику $\mathbf{EE^1F}$ шуканий кут $\boldsymbol{\alpha}$ може бути визначений як $\boldsymbol{\alpha} = 90° - \boldsymbol{\varphi}$, де $\boldsymbol{\varphi}$ – кут між прямою **a**, на якій розташована гіпотенуза **EF** (див. рис. 5.14), і перпендикуляром $\mathbf{t \perp \Sigma}$, на якому розташований катет $\mathbf{E_1E^1}$.

Пропоноване нижче проекційне вирішення даної задачі спрямовано на визначення кута $\boldsymbol{\varphi} = \angle(\mathbf{a, t})$.

1) Побудуємо в площині $\mathbf{\Sigma}$ дві лінії рівня $\mathbf{h(h_1, h_2)}$ і $\mathbf{f(f_1, f_2)}$, де $\mathbf{h_2 \parallel x}$, $\mathbf{f_1 \parallel x}$.

2) З довільної точки $\mathbf{E \in a}$ опустимо перпендикуляр $\mathbf{t \perp \Sigma}$, при цьому $\mathbf{t_2}$

проходить через $\mathbf{E_2}$, $\mathbf{t_2} \perp \mathbf{f_2}$; $\mathbf{t_1}$ проходить через $\mathbf{E_1}$, $\mathbf{t_1} \perp \mathbf{h_1}$.

3) Визначаємо кут $\varphi = \angle(\mathbf{a}, \mathbf{t})$ у наступній послідовності:

- у площині $\Delta(\mathbf{a}, \mathbf{t})$ вибираємо лінію рівня, наприклад, $\mathbf{h_1}(\mathbf{h^1}_1, \mathbf{h_2}^1)$, де $\mathbf{h_2}^1 \parallel \mathbf{x}$;
- введенням системи площин проекцій $\mathbf{\Pi_1} \perp \mathbf{\Pi_4}$ з віссю $\mathbf{x_1} \perp \mathbf{h^1}_1$ будуємо на $\mathbf{\Pi_4}$ вироджену проекцію $\mathbf{E_4}\ \mathbf{h_4}^1$ площини Δ;
- введенням системи площин проекцій $\mathbf{\Pi_4} \perp \mathbf{\Pi_5}$ з віссю $\mathbf{x_2} \parallel E_4\ \mathbf{h_4}^1$ будуємо на $\mathbf{\Pi_5}$ кут $\varphi = \cdot(\mathbf{t_5}, \mathbf{a_5})$;
- побудовою прямого кута визначаємо шуканий кут $\boldsymbol{\alpha} = \cdot(\mathbf{a}, \mathbf{\Sigma}) = 90° - \varphi$.

2.3. Кут між площинами

Для двох площин існує поняття двогранного кута.

Визначення. **Двогранним кутом називається фігура, утворена прямою t і двома напівплощинами із спільною межею t, що не належать одній площині**. Напівплощини, що утворюють двогранний кут, називаються його гранями, пряма **t** – ребром двогранного кута. Двогранний кут з гранями **Σ** і Δ і ребром **t** позначається **ΣtΔ**.

Відзначимо на ребрі точку і в кожній грані з цієї точки проведемо промінь перпендикулярно до ребра. Утворений цими променями кут називається **лінійним кутом** двогранного кута. Лінійний кут служить мірою двогранного кута. Величина двогранного кута не залежить від вибору його лінійного кута.

Задача. Дано дві площини **Σ(ΔABC)** і **Δ(ΔKML)**. Визначити кут між площинами (рис. 5.16).

Проекційне вирішення задачі полягає в побудові лінії перетину площин **Σ** і **Δ**, що є за визначенням ребром двогранного кута, і наступним проектуванням її в точку на додатковій площині проекцій. Вихідні площини **Σ** і **Δ** будуть мати на цій площині вироджені проекції - прямі, що перетинаються в зазначеній точці. Кут між цими прямими і є вирішенням задачі. Послідовність запропонованого проекційного вирішення буде наступним:

1) в одній із двох даних площин, наприклад **Σ**, будуємо лінію рівня, наприклад $\mathbf{h}(\mathbf{h_1}, \mathbf{h_2})$, де $\mathbf{h_2} \parallel \mathbf{x}$;

2) введенням нової системи площин проекцій $\mathbf{\Pi_1} \perp \mathbf{\Pi_4}$ з віссю $\mathbf{x_1} \perp \mathbf{h_1}$ і $\mathbf{\Pi_4} \perp \mathbf{h}$ будуємо на $\mathbf{\Pi_4}$ додаткові проекції площин – $\mathbf{B_4C_4}$ для **Σ** і $\Delta\mathbf{K_4M_4L_4}$ для площини Δ;

3) відзначаємо відрізки $\mathbf{1_42_4}$ і $\mathbf{1_12_1}$ – додаткові проекції лінії $\mathbf{t}(\mathbf{1_12_1}, \mathbf{1_42_4})$ перетину заданих площин;

4) у кожній із площин **Σ** і **Δ** вибираємо по одній точці, наприклад $\mathbf{A} \in \mathbf{\Sigma}$ і $\mathbf{K} \in \mathbf{\Sigma}$;

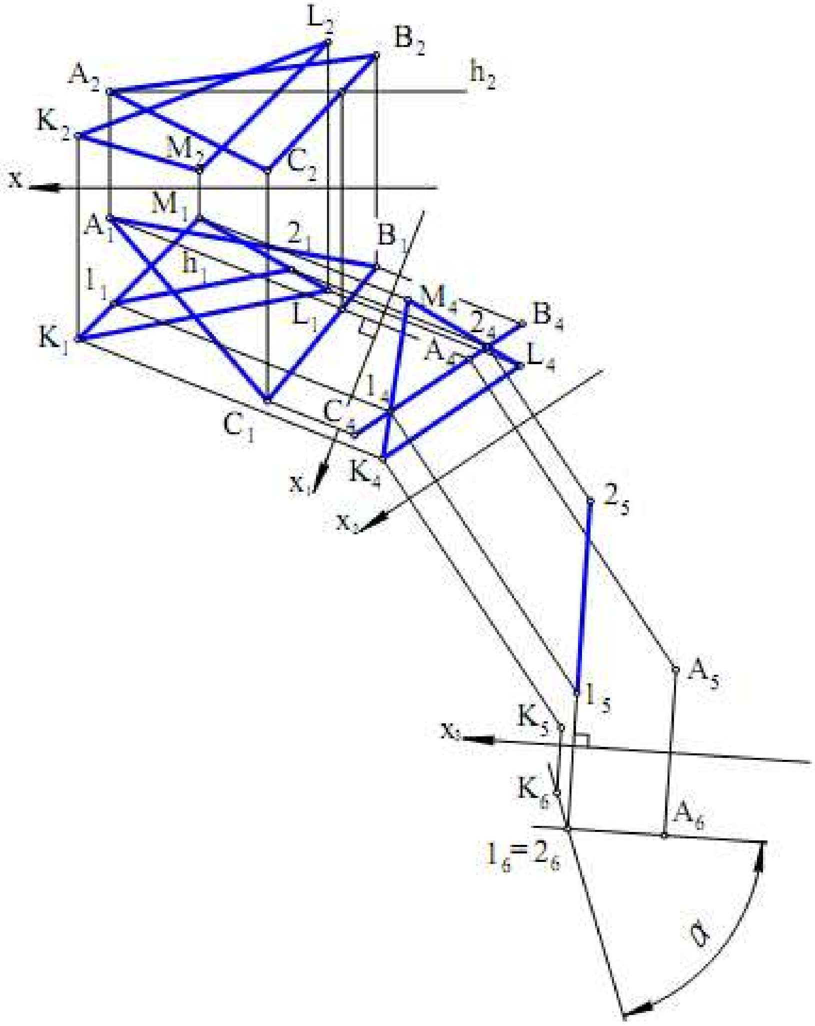
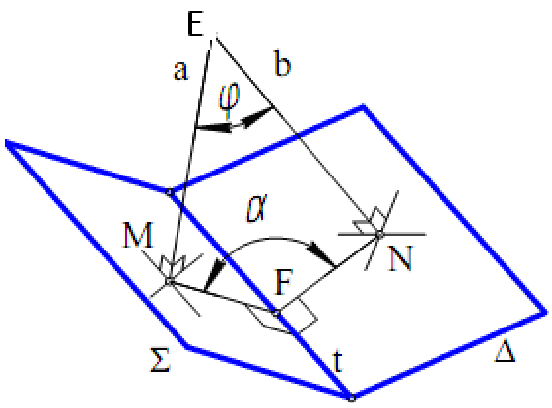


Рис. 5.16

5) введенням нової системи площин проекцій $\Pi_4 \perp \Pi_5$ з віссю $x_2 \| 1_4 2_4$ і $\Pi_5 \| t$ **(1,2)** будуємо на Π_5 додаткові проекції $1_5 2_5$, A_5, K_5 відповідних фігур: лінії перетину **t (1, 2)** і точок **А**, **К**;

6) введенням нової системи площин проекцій $\Pi_5 \perp \Pi_6$ з віссю $x_3 \perp 1_5 2_5$ і $\Pi_6 \perp t$ **(1,2)** будуємо на Π_6 лінійний кут **α** двогранного кута **ΣtΔ,** що і є рішенням задачі.



Можливо інше проекційне вирішення розглянутої задачі, засноване на наступному алгоритмі:

1) у просторі вибираємо довільну точку **Е** (рис. 5.17);

2) опускаємо два перпендикуляри:

a ⊥ Σ, де **a** проходить через точку **Е**;

b ⊥ Δ, де **b** проходить також через точку **Е**;

3) із властивостей плоского чотирикутника **EMFN** випливає, що

Рис. 5.17 величина **α** шуканого лінійного кута двогранного кута **ΣtΔ** дорівнює **180°– φ**, де **φ = ∠(a, b).**

Задача. Дано площини **Σ(AB, DC)**, де **AB ∩ DC** і **Δ(KL, PT)**, де **KL║PT**(рис. 5.18). Потрібно побудовами визначити кут між площинами.

Послідовність проекційного вирішення може бути наступною:

1) у площині **Σ** будуємо лінії рівня $\mathbf{f(f_1^1, f_2^1)}$ і $\mathbf{h(h_1^1, h_2^1)}$, де $\mathbf{f_1^1 \parallel x}$, $\mathbf{h_2^1 \parallel x}$, а в площині Δ – лінії рівня $\mathbf{h_2(h_1^2, h_2^2)}$ і $\mathbf{f_2(f_1^2, f_2^2)}$, де $\mathbf{h_2^2 \parallel x}$, $\mathbf{f_1^2 \parallel x}$;

2) із точки **E** простору опускаємо два перпендикуляри – $\mathbf{a}\ (\mathbf{a_1, a_2}) \perp \Sigma$ і $\mathbf{b}\ (\mathbf{b_1, b_2}) \perp \Delta$, при цьому $\mathbf{a_2} \perp \mathbf{f_2^1}$, $\mathbf{b_2} \perp \mathbf{f_2^2}$, $\mathbf{a_1} \perp \mathbf{h_1^1}$, $\mathbf{b_1} \perp \mathbf{h_1^2}$;

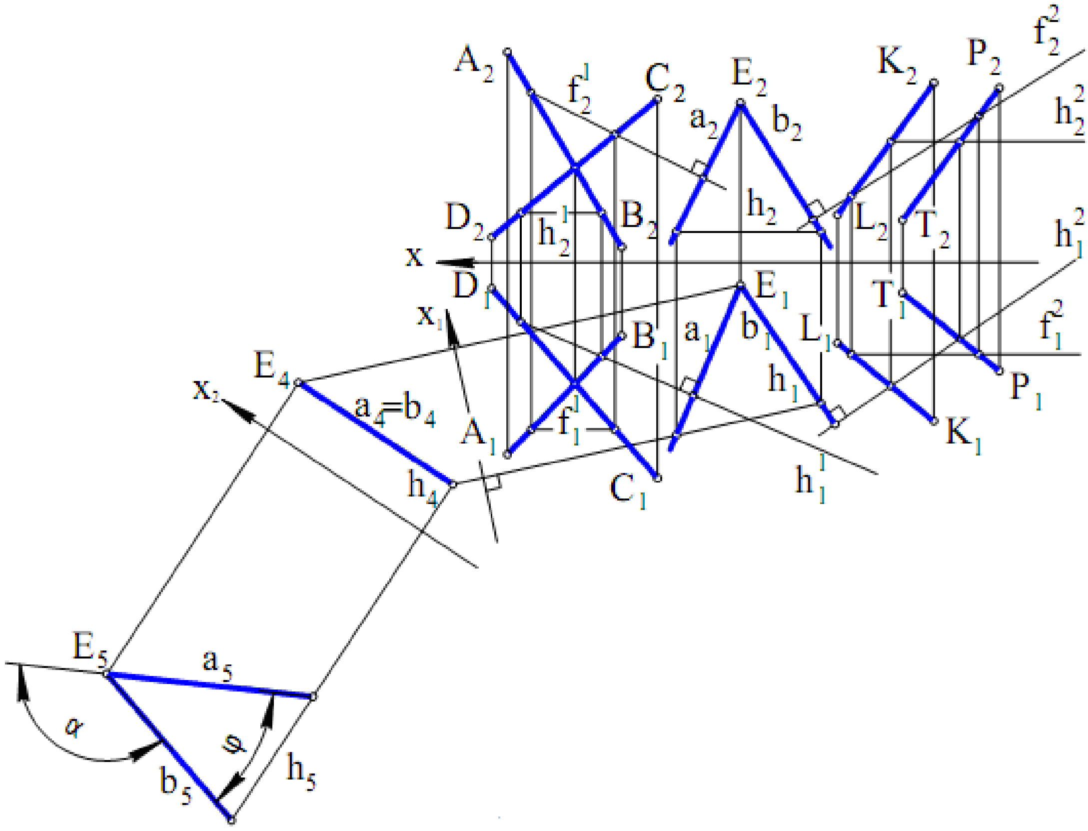


Рис. 5.18

3) у площині побудованих пересічних прямих **a** і **b** вибираємо лінію рівня, наприклад $\mathbf{h(h_1, h_2)}$, де $\mathbf{h_2 \parallel x}$;

4) вводимо нову систему площин проекцій $\mathbf{\Pi_1 \perp \Pi_4}$ з віссю $\mathbf{x_1} \perp \mathbf{h_1}$ і $\Pi_4 \perp \mathbf{h}$;

5) на $\mathbf{\Pi_4}$ будуємо вироджену проекцію $\mathbf{a_4} = \mathbf{b_4}$ площини прямих **a** і **b**;

6) вводимо нову систему площин проекцій $\mathbf{\Pi_4 \perp \Pi_5}$ з віссю $\mathbf{x_2 \parallel a_4}$ і $\mathbf{\Pi_5} \parallel$ **(a, b)**, де **(a, b)** – площина прямих **a** і **b**;

7) на $\mathbf{\Pi_5}$ будуємо кут **φ** = ·($\mathbf{a_5}$, $\mathbf{b_5}$), що дозволяє визначити шуканий кут **α** між площинами **Σ** і Δ, рівний **180° – φ**.

Відповідно до поняття кута в стереометрії, кут між площинами повинен бути гострим. Тому необхідно прийняти в наведеному проекційному рішенні значення кута між площинами **Σ** і **Δ**, рівне **φ.**

ЛЕКЦІЯ №6. КРИВІ ЛІНІЇ. ВЛАСТИВОСТІ КРИВИХ

Крива лінія – це множина послідовних положень точки, що переміщується в просторі. Таке визначення дає наочне поняття про криву лінію як про траєкторію точки.

Для побудови ортогональних проекцій кривої (просторової або плоскої) необхідно побудувати проекції ряду точок, що належать цій кривій, і з'єднати між собою однойменні проекції в тій же послідовності, в якій вони розташовувалися на ній у просторі. При заданні кривої її проекціями треба вказати проекції хоча б однієї точки, що належить кривій. Так, якщо на проекціях кривої **m** (рис. 6.1) не вказати проекції точки **A** (**A_1, A_2**), то тільки по проекціях **m_1** і **m_2** не можна судити про форму кривої.

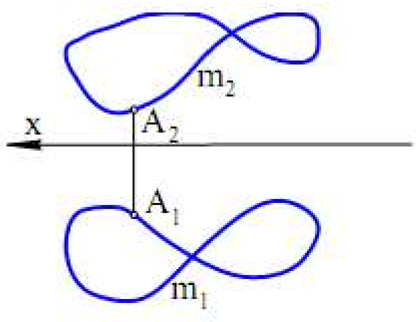


Рис. 6.1

Лінії підрозділяються на **алгебраїчні**, якщо в декартовій системі координат вони визначаються алгебраїчними рівняннями, і **трансцендентні**, якщо вони описуються трансцендентними рівняннями.

До алгебраїчних ліній, зокрема, відносяться коло, еліпс, парабола, гіпербола, астроїда та ін.

До трансцендентних ліній відносяться синусоїда, спіраль Архімеда, циклоїда та інші.

Лінії можуть бути **просторовими** і **плоскими**.

Лінії, в яких всі точки належать одній площині, називають плоскими.

Крива, точки якої не лежать в одній площині, називається просторовою кривою. Прикладом плоскої кривої є коло, прикладом просторової кривої - циліндрична гвинтова лінія.

1. ВЛАСТИВОСТІ КРИВИХ, ІНВАРІАНТНІ ЩОДО ОРТОГОНАЛЬНОГО ПРОЕКТУВАННЯ

При побудові ортогональних проекцій кривих необхідно знати ті їхні властивості, які зберігаються (інваріантні) при проектуванні. До таких властивостей відносяться наступні:

1) Дотичні до кривої проектуються в дотичні до її проекцій (за винятком, коли дотична проектується в точку).

2) Невласним (нескінченно віддаленим) точкам кривої відповідають невласні точки її проекції.

При проектуванні плоских кривих на додаток до відзначеного будуть справедливі такі властивості:

3) Порядок проекції алгебраїчної кривої дорівнює порядку самої кривої.

Порядок алгебраїчної кривої визначається ступенем рівняння, що описує цю криву.

4) Число вузлових точок (точок, у яких крива перетинає саму себе) на проекції кривої дорівнює числу вузлових точок самої кривої.

2. КОМПЛЕКСНЕ КРЕСЛЕННЯ КОЛА

Якщо коло розташоване в площині рівня, то на одну площину проекцій воно проектується у відрізок, а на іншу – в коло (у натуральну величину). На рис. 6.2 показане комплексне креслення кола **k**, розташованого в горизонтальній площині рівня **Σ**. На **$П_2$** коло проектується у відрізок (частина прямої **$Σ_2$**), а на **$П_1$** – в коло.

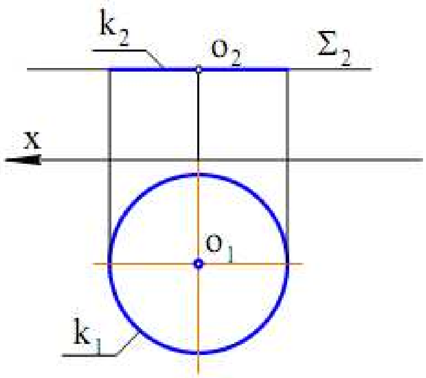


Рис. 6.2

Коло, розташоване в площині, не паралельній і не перпендикулярній до площини проекцій, проектується на цю площину в криву, яка називається **еліпсом**. Діаметри кола будуть проектуватися у відрізки, що називаються діаметрами еліпса. Довжина діаметра еліпса дорівнює довжині діаметра кола, помноженні на косинус кута нахилу діаметра кола до площини проекцій. Діаметр кола, розташований на лінії рівня, проектується в натуральну величину, тому що кут нахилу його до площини проекцій дорівнює нулю. Цей діаметр буде більше всіх інших діаметрів, він і названий великим діаметром еліпса.

Діаметр кола, перпендикулярний до великого, нахилений до тієї ж площини проекцій під найбільшим кутом. Його називають малим діаметром еліпса. Побудова еліпса по великому і малому діаметрах, які взаємно перпендикулярні, наведена нижче.

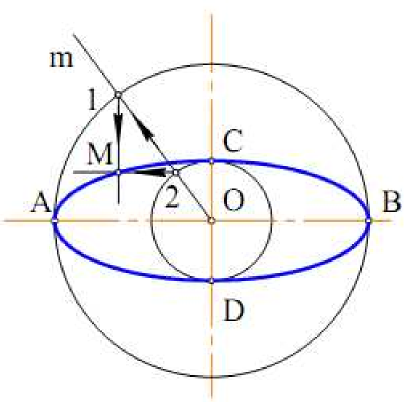


Рис. 6.3

На рис. 6.3 показана побудова однієї точки еліпса. Так, нехай дано: **AB** - великий діаметр еліпса; **CD** - малий діаметр еліпса. Після проведення великого кола діаметром **AB** і малого кола діаметром **CD**, проводимо довільний промінь **m**. Через точку **1** на великому колі проводимо відрізок, паралельний малій осі **CD**, а через точку **2** на малому колі - відрізок, паралельний великій осі **AB**. Точка перетину побудованих відрізків є точкою еліпса (точка **M**). Проводячи множину променів, що проходять через точку **O** (проекція центра кола), і повторюючи показані побудови, одержимо множину точок еліпса. Потім по лекалу, з'єднуючи ці точки, одержимо еліпс.

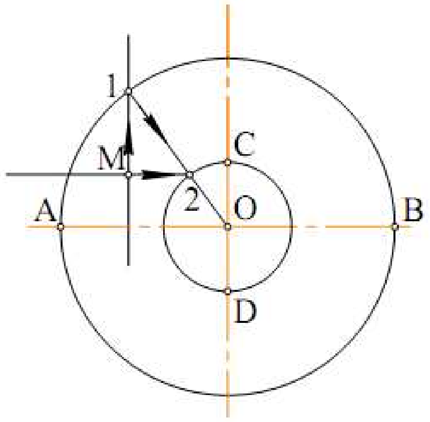


Рис. 6.4

На рис. 6.4 показана послідовність побудови еліпса по великому діаметру і точці еліпса. Дано: **AB** - великий діаметр еліпса; **M** - точка еліпса. Послідовність побудов показана стрілками. Ці побудови випливають із розглянутих на рис. 6.3. Після визначення точки **2**, а виходить, і малої осі CD, можемо перейти до побудови будь-якого числа точок еліпса, як показано на рис. 6.3.

Нехай коло радіуса **R** розташоване тепер у фронтально проектуючій площині Δ, центр кола – точка **O**,(рис.6.5). Для знаходження великого діаметра еліпса необхідна лінія рівня. Через точку **O** проведемо горизонталь **h** ($\mathbf{h_1}$, $\mathbf{h_2}$) у площині Δ. На $\mathbf{h_1}$ відкладемо відрізки $\mathbf{O_1A_1{=}O_1B_1}$, довжини яких рівні **R**. Відрізок $\mathbf{A_1B_1}$ – це великий діаметр еліпса, у який проектується коло на $\mathbf{П_1}$. Через точку O у площині Δ проведемо фронталь $\mathbf{f(f_1,f_2)}$. На $\mathbf{f_2}$ відкладемо відрізки $\mathbf{O_2C_2{=}O_2D_2}$, довжини яких рівні **R**.

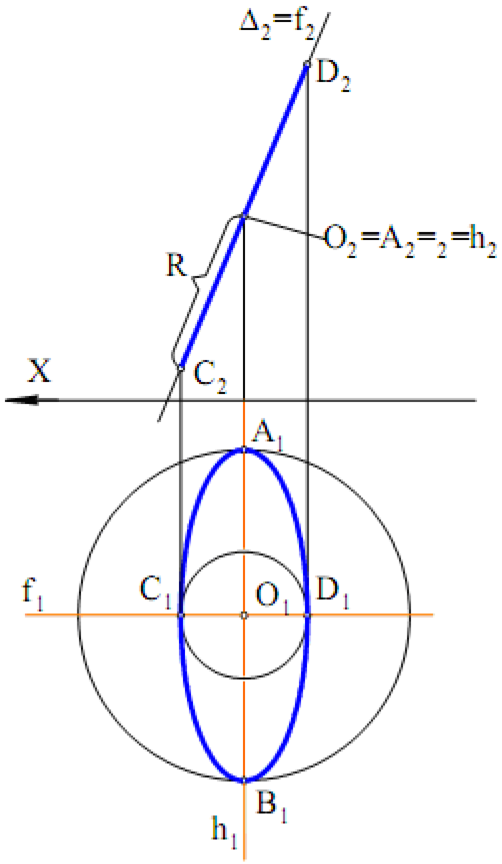


Рис. 6.5

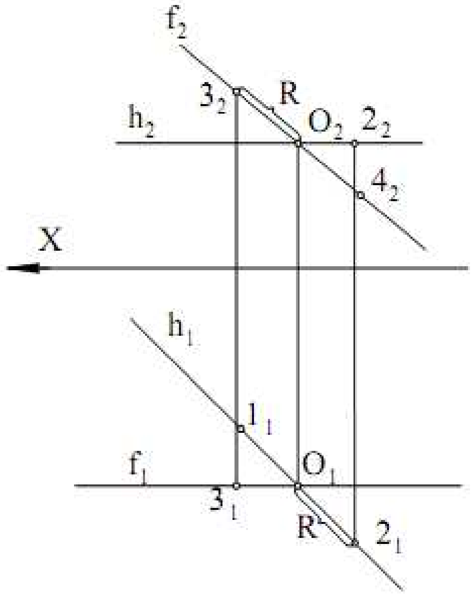


Рис. 6.6

Точки **C** і **D** є точками кола, які розташовані на фронталі **f**.
Горизонтальні проекції цих точок належать $\mathbf{f_1}$ (точки $\mathbf{C_1}$ і $\mathbf{D_1}$).

Тому що відрізок $\mathbf{C_1D_1}$ перпендикулярний до великого діаметра $\mathbf{A_1B_1}$, то $\mathbf{C_1D_1}$ – це малий діаметр еліпса на $\mathbf{\Pi_1}$.

Тепер по великому діаметрі $\mathbf{A_1B_1}$ і малому діаметру $\mathbf{C_1D_1}$ будуємо еліпс (горизонтальна проекція кола). Фронтальною проекцією кола є відрізок $\mathbf{C_2D_2}$, тому що Δ – фронтально - проектуюча площина, і всі фронтальні проекції точок кола розташовані на прямій Δ_2 між точками $\mathbf{C_2}$ і $\mathbf{D_2}$. Те ж саме одержимо, якщо будемо будувати еліпс на $\mathbf{\Pi_2}$ по великому діаметрі $\mathbf{C_2D_2}$ і малому діаметру, величина якого дорівнює нулю.

Якщо коло розташоване в площині загального положення, то воно проектується на $\mathbf{\Pi_1}$ в еліпс (горизонтальна проекція кола) і на $\mathbf{\Pi_2}$ – теж в еліпс (фронтальна проекція кола). У цьому разі еліпси будуємо по великому діаметрі і точці. Нехай площина загального положення, у якій розташоване коло радіуса **R**, задана прямими **h** ($\mathbf{h_1}$, $\mathbf{h_2}$) і **f** ($\mathbf{f_1}$,$\mathbf{f_2}$), (рис.6,6). Звернемо увагу на те, що як прямі, що задають площину, узяті її головні лінії – горизонталь і фронталь. Точка **O** – центр кола. На $\mathbf{h_1}$ будуємо великий діаметр $\mathbf{1_12_1}$ ($|\mathbf{O_11_1}|=|\mathbf{O_12_1}|=\mathbf{R}$). Це великий діаметр горизонтальної проекції кола. На $\mathbf{f_2}$ будуємо великий діаметр $\mathbf{3_24_2}$ ($|\mathbf{O_23_2}| = |\mathbf{O_24_2}| = \mathbf{R}$).
Це великий діаметр фронтальної проекції кола. Будуємо для точки **3** горизонтальну проекцію $\mathbf{3_1}$. На $\mathbf{\Pi_1}$ маємо $\mathbf{1_12_1}$ – великий діаметр еліпса, $\mathbf{3_1}$ – точка еліпса. Будуємо для точки **2** фронтальну проекцію $\mathbf{2_2}$. На $\mathbf{\Pi_2}$ маємо $\mathbf{3_24_2}$ – великий діаметр еліпса, $\mathbf{2_2}$ – точка еліпса. Тепер кожну із проекцій кола можна побудувати по великому діаметру й точці. Якщо при завданні площини кола горизонталь і фронталь не використовувалися, то їх потрібно провести, а потім виконати описані вище побудови.

3. КОМПЛЕКСНЕ КРЕСЛЕННЯ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ГВИНТОВОЇ ЛІНІЇ

Із просторових кривих найбільше поширення знаходять гвинтові лінії. Циліндричною гвинтовою лінією називається множина послідовних положень точки, що робить рівномірне переміщення по прямій, яка рівномірно обертається навколо паралельної їй осі. За один оборот прямої навколо осі точка переміститься по прямій на величину **P**, названу кроком гвинтової лінії. Тому що розглянуті рухи точки рівномірні і взаємозалежні, то, наприклад, повороту точки на кут 180° (половина обороту) відповідатиме переміщення по прямій на половину кроку. За аналогією, за **1/n** частину обороту точка переміщується на **1/n** кроку. На цьому ґрунтується побудова комплексного креслення циліндричної гвинтової лінії. Нехай вісь гвинтової лінії **i** перпендикулярна $\mathbf{\Pi_1}$, початкове положення прямої **m**, паралельної осі **i**, і точки задане проекціями $\mathbf{m_1}$, $\mathbf{m_2}$ і $\mathbf{1_1}$, $\mathbf{1_2}$ відповідно, (рис. 6.7). Проекцією гвинтової лінії на $\mathbf{\Pi_1}$ буде коло, тому що відстань від точки до осі **i** не змінюється і дорівнює **D/2**. Для побудови фронтальної проекції гвинтової лінії розділимо коло на $\mathbf{\Pi_1}$ і відрізок на $\mathbf{\Pi_2}$, що відповідає кроку **P**, на рівну кількість частин (на рис. 6.7 – 8 частин).

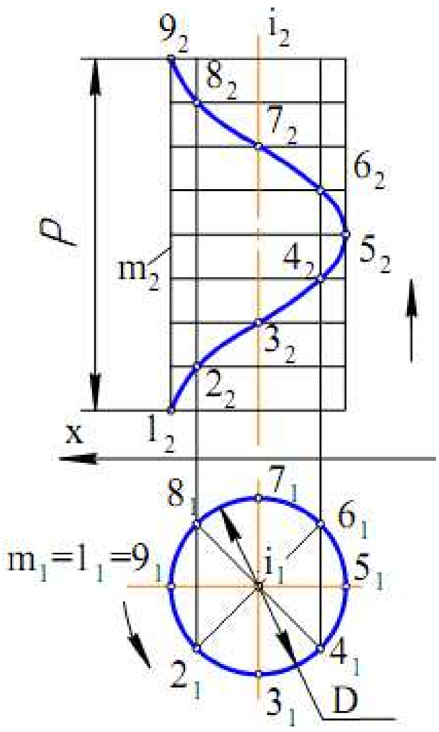


Рис. 6.7

Тоді повороту прямої **m** на 1/8 частину обороту відповідатиме лінійне переміщення точки на 1/8 кроку. На рис. 6.7 точка займає положення **2(2₁, 2₂)**. При повороті прямої ще на 1/8 частину оберту, точка підніметься ще на 1/8 частину кроку – точка **3(3₁, 3₂)** і т.д. Отримані фронтальні проекції точок гвинтової лінії з'єднуємо по лекалу.

Якщо обертання прямої навколо осі виконується проти годинникової стрілки, і точка при цьому піднімається вгору, то така гвинтова лінія називається **правою гвинтовою лінією**. Якщо обертання виконується за годинниковою стрілкою, і точка при цьому піднімається вгору, то гвинтова лінія називається **лівою гвинтовою лінією**.

Пряма **m** при обертанні навколо осі **i** описує циліндричну поверхню обертання, тому гвинтова лінія називається циліндричною гвинтовою лінією. Всі точки цієї гвинтової лінії належать циліндричній поверхні обертання.

Звернемо увагу на те, що горизонтальною проекцією циліндричної гвинтової лінії є коло, а фронтальною - крива, що називається **синусоїдою**. Для одержання більш точного креслення гвинтової лінії необхідно коло ділити на більше число частин (**n** >8).

Якщо за тих самих умов утворення гвинтової лінії пряма **m** перетинає вісь **i**, то така гвинтова лінія називається **конічною гвинтовою лінією**.

ЛЕКЦІЯ №7. ПОВЕРХНІ. ГРАННІ ПОВЕРХНІ І МНОГОГРАННИКИ. ПОВЕРХНІ ОБЕРТАННЯ. ЦИКЛІЧНІ Й ГВИНТОВІ ПОВЕРХНІ

1. ПОНЯТТЯ ПОВЕРХНІ

У нарисній геометрії **поверхні розглядаються як множина послідовних положень деякої лінії, що переміщується у просторі за певним законом**. Такий спосіб утворення поверхні називається **кінематичним.**

Лінія (крива або пряма) рухається у просторі за певним законом і утворює поверхню. Вона називається **твірною**. У процесі утворення поверхні вона може залишатися незмінною або міняти форму. Закон переміщення твірної задається у вигляді сукупності ліній і вказівок про характер переміщення твірної. Ці лінії називаються **напрямними**.

Крім кінематичного способу, поверхня може бути задана:

• **аналітично**, тобто описана математичним виразом;

• **каркасним способом**, що використовується при завданні складних поверхонь; каркас поверхні являє собою впорядковану множину точок або ліній, що належать поверхні.

Щоб задати поверхню на комплексному кресленні, досить мати на ньому такі елементи поверхні, які дозволяють побудувати кожну її точку.

Сукупність цих елементів називається **визначником поверхні**.

Визначник поверхні складається з двох частин:

• **геометричної частини**, що включає постійні геометричні елементи (точки, лінії), які беруть участь в утворенні поверхні;

• **алгоритмічної частини**, що задає закон руху твірної, характер зміни її форми.

У символічному вигляді визначник поверхні **Ф** можна записати у вигляді: **Ф(Г) [А]**, де **Г** – геометрична частина визначника, **А** – алгоритмічна.

Щоб у поверхні виділити визначник, слід виходити з кінематичного способу її утворення. Але оскільки що багато однакових поверхонь можуть бути отримані різними шляхами, то вони будуть мати різні визначники. Нижче будуть розглянуті найпоширеніші поверхні відповідно до класифікаційних ознак, прийняті в курсі нарисної геометрії.

2. КОНТУР І НАРИС ПОВЕРХНІ

Щоб задати поверхню на комплексному кресленні, досить указати проекції не всієї множини точок і ліній, що належать поверхні, а тільки геометричних фігур, що входять до складу її визначника. Такий спосіб задання поверхні дозволяє побудувати проекції будь-якої її точки.

Задання поверхні проекціями її визначника не забезпечує наочність, що утрудняє читання креслення. Для підвищення наочності, якщо це можливо, на кресленні вказують нарисові лінії (нариси) поверхні.

Коли яка-небудь поверхня **Ω** проектується паралельно на площину проекцій **Σ**, то проектуючі прямі дотичні **поверхні Ω** утворять циліндричну поверхню. (рис. 7.1).

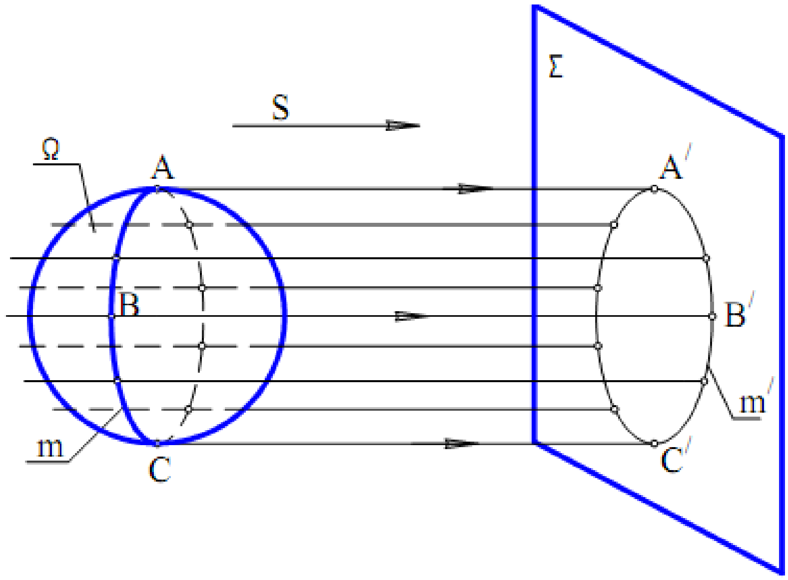


Рис. 7.1

Ці проектуючі прямі торкаються **поверхні Ω** у точках, що утворюють деяку лінію **m**, що називається **контурною лінією**.

Проекція контурної лінії **m** на площину **Σ – m/** називається **нарисом поверхні**. Нарис поверхні відокремлює проекцію поверхні від іншої частини площини проекцій.

Контурну лінію поверхні використовують при визначенні видимості точок щодо площини проекцій. Так, на рис. 7.1 проекції точок поверхні **Ω**, розташовані ліворуч контуру **m**, на площині **Σ** будуть видимими. Проекції інших точок поверхні будуть невидимими.

3. ТОЧКА І ЛІНІЯ НА ПОВЕРХНІ

Точка належить поверхні, якщо вона належить якій-небудь лінії, що належить поверхні.

Лінія належить поверхні, якщо всі її точки належать поверхні.

Отже якщо точка належить поверхні, то і її проекції належать однойменним проекціям деякої лінії цієї поверхні.

Для побудови точок, що лежать на поверхнях, користуються графічно простими лініями (прямими або колами) цієї поверхні. У деяких випадках застосовують криві, які проектуються в графічні прості лінії. Приклади побудови відсутніх проекцій точок і ліній, що належать поверхням, розглянуті нижче для кожної класифікаційної групи поверхонь.

4. ПОВЕРХНІ (ЗАГАЛЬНІ ВІДОМОСТІ)

Із множини різних поверхонь виділяють кілька класів залежно від форми твірної, а також від форми, числа і розташування напрямних:

1) **Поверхні закономірні й незакономірні**.

2) **Лінійчаті (утворені переміщенням прямої лінії) і нелінійчаті (криволінійні) поверхні**.

3) **Поверхні що розгортаються (або торси) і що не розгортаються.**

4) **Поверхні з твірною постійної форми і поверхні з твірною змінної форми.**

5) **Поверхні з поступальним, обертальним або гвинтовим рухом твірної**.

З усього різноманіття поверхонь тут розглянуті лінійчаті поверхні, гранні, поверхні обертання, циклічні й гвинтові.

5. ЛІНІЙЧАТІ ПОВЕРХНІ

Лінійчата поверхня в загальному випадку визначається трьома напрямними лініями. Тоді визначник такої поверхні має вигляд: **Ф(t; k, l, m),** де **t** – прямолінійна твірна; **k, l, m** – у загальному випадку криволінійні напрямні. Алгоритмічну частину визначника можна записати так: прямолінійна твірна у своєму русі перетинає всі три напрямні.

5.1. Лінійчаті поверхні з двома напрямними і площиною паралелізму

В інженерній практиці найбільше поширення одержали лінійчаті поверхні, в яких одна з напрямних є невласною прямою.

На кресленні її представником є площина паралелізму. Твірна у своєму русі перетинає дві напрямні й паралельна до деякої площини **Σ** – площини паралелізму. Такі поверхні називають **поверхнями Каталана**. Визначник такої поверхні має вигляд **Ф(Σ; k, l).**

Залежно від форми напрямних розрізняють наступні поверхні Каталана: **циліндроїд, коноїд і гіперболічний параболоїд** (коса площина).

Циліндроїд – лінійчата поверхня з площиною паралелізму, в якої обидві напрямні є кривими лініями. На рис. 7.2а показаний відсік (частина) циліндроїда, в якого площина паралелізму **Σ** – горизонтально - проектуюча. На горизонтальній площині проекцій твірні паралельні між собою і паралельні сліду площини **$\Sigma(\Sigma_1)$**. Фронтальні проекції твірних побудовані виходячи з умови перетину напрямних **k** і **l** у відповідних точках 1, 2, 3, , 10...

У **коноїда**, на відміну від циліндроїда, одна з напрямних пряма.

Гіперболічний параболоїд виходить у результаті переміщення прямої по двох мимобіжних прямолінійних напрямних.
Твірна увесь час залишається паралельною площині паралелізму. На рис. 7.2б площина **Σ** – фронтально - проектуюча і проекції твірних паралельні фронтальному сліду площини **$\Sigma(\Sigma_2)$.**

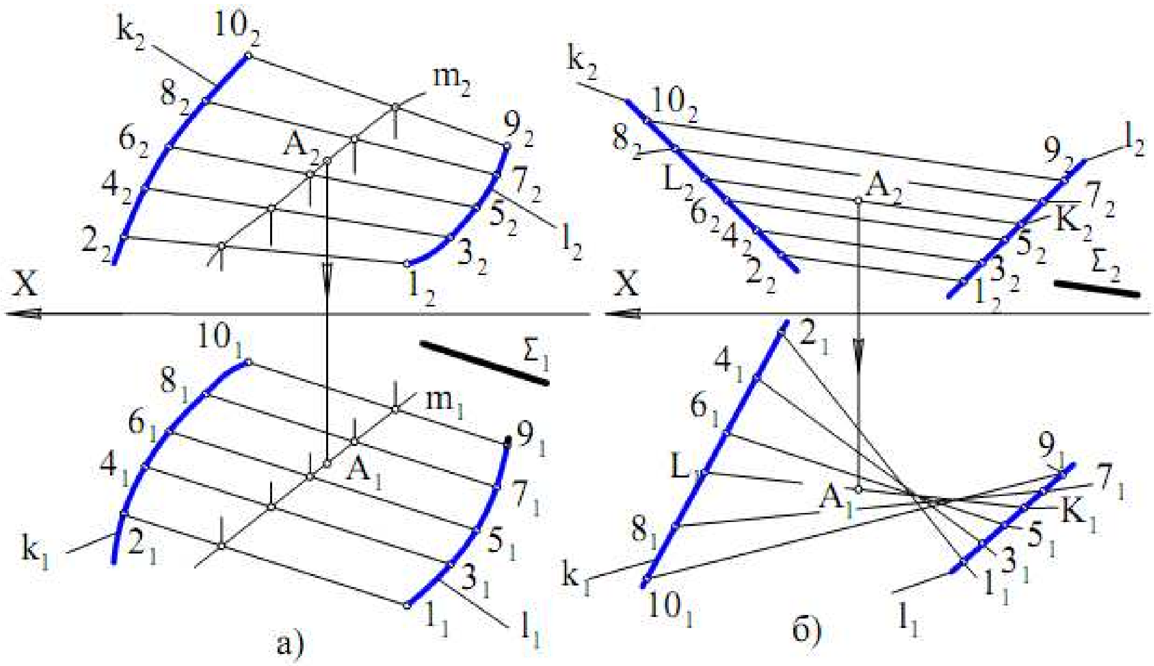


Рис. 7.2

Розглянемо приналежність точки поверхням Каталана. Нехай задана фронтальна проекція точки **$A(A_2)$,** що належить поверхні циліндроїда (рис. 7.2а). Потрібно побудувати горизонтальну проекцію точки **A**. Відповідно до умови приналежності точки поверхні проведемо через **A_2** проекцію лінії **$m(m_2)$,** що належить циліндроїду. Тому що лінія **m** належить поверхні, будуємо горизонтальні проекції точок перетину кривої **m** з твірними циліндроїда. Множина отриманих точок задає горизонтальну проекцію лінії **$m(m_1)$.** Шукана проекція точки **$A(A_1)$** буде розташована на **m_1.**

Нехай тепер фронтальна проекція точки **$A(A_2)$** задана на поверхні гіперболічного параболоїда. І в цьому випадку через **A_2** можна провести проекцію довільної кривої **m**. Однак тут відомо, що проекції твірних паралельні сліду площини **$\Sigma(\Sigma_2)$.** Тоді через **A_2** проводимо проекцію твірної **$KL(K_2L_2)$** паралельно **Σ_2.** Горизонтальну проекцію **KL** проводимо через точки **K_1** і **L_1**, що належать напрямним **k** і **l**, відповідно. Шукана проекція точки **$A(A_1)$** буде розташована на **K_1L_1**.

5.2. Конічна і циліндрична поверхні

Конічна поверхня утворюється рухом прямолінійної твірної по криволінійній напрямній. При цьому твірна проходить через деяку нерухому точку **S**, що називається **вершиною** (рис. 7.3а).

Конічна поверхня є окремим випадком лінійчатих поверхонь загального виду, коли дві напрямні, наприклад **l** і **m**, перетинаються в точці **S**.

Геометрична частина визначника конічної поверхні включає напрямну **k** і вершину **S**. Залежно від виду напрямної конічна поверхня може бути замкнутою і незамкнутою.

Циліндрична поверхня виходить у тому випадку, коли всі прямолінійні твірні проходять через напрямну **k** і перетинаються в невласній точці **S** (рис. 7.3, б). Геометрична частина визначника конічної поверхні включає напрямну **k** і невласну вершину **S** (напрямний вектор). Циліндрична поверхня також може бути незамкнутою або замкнутою.

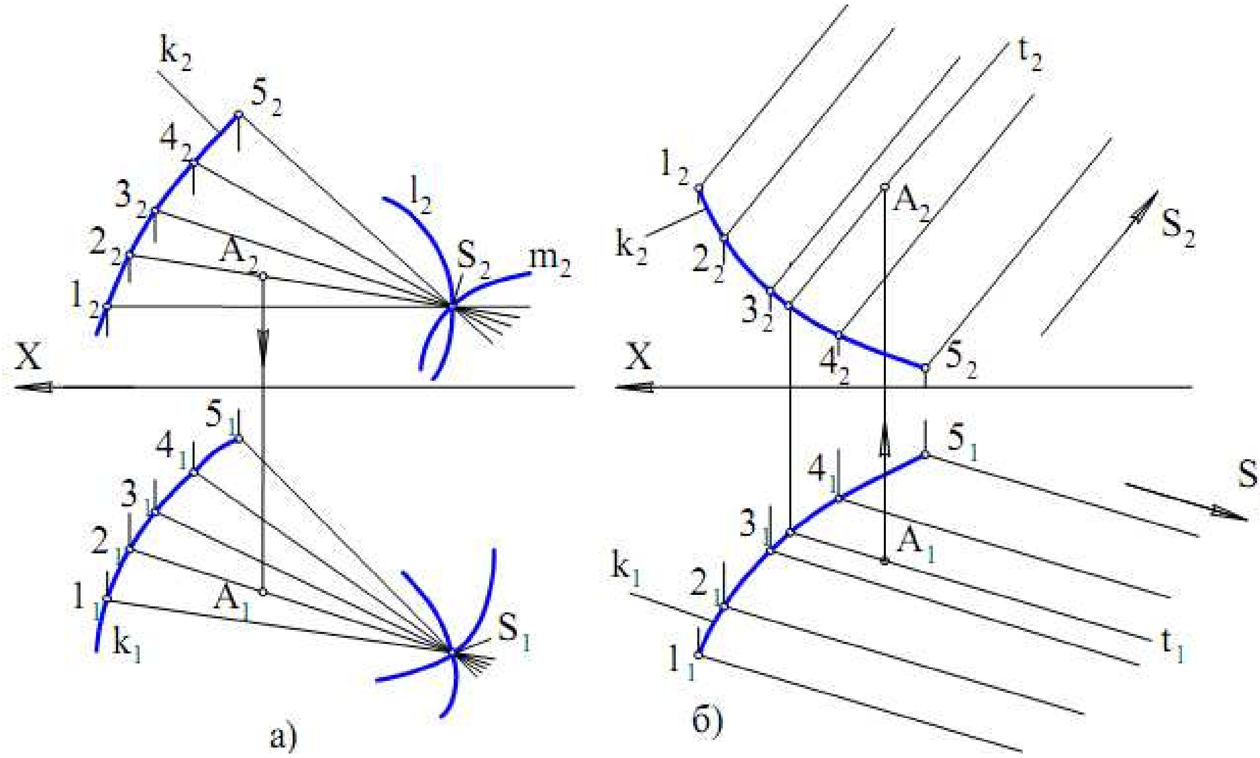


Рис. 7.3

Точка **A** належить даним поверхням, тому що вона належить твірним цих поверхонь. На конічній поверхні вона належить твірній **2S**, а на циліндричній – твірній **t**.

5.3. Торс

Торс (поверхня з ребром повернення) утворюється рухом прямолінійної твірної, дотичної у всіх своїх положеннях до деякої просторової кривої, названої ребром повернення (від франц. «tors») - кручений).

Ребро повернення **m** є напрямною торса. Торс складається з двох порожнин, розділених ребром повернення (рис. 7.4).

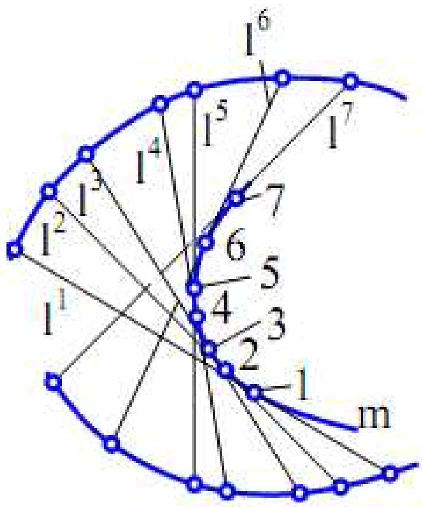


Рис. 7.4

Якщо ребро повернення вироджується в точку, поверхня торса перетворюється в конічну поверхню. У випадку, якщо ребро повернення є невласною точкою, торсова поверхня стає циліндричною

6. ГРАННІ ПОВЕРХНІ І МНОГОГРАННИКИ

Гранною поверхнею називається поверхня, утворена переміщенням прямолінійної твірної по ламаній напрямній. Гранні поверхні можна розділити на два види: **пірамідальні** (рис. 7.5а) і **призматичні** (рис. 7.5б).

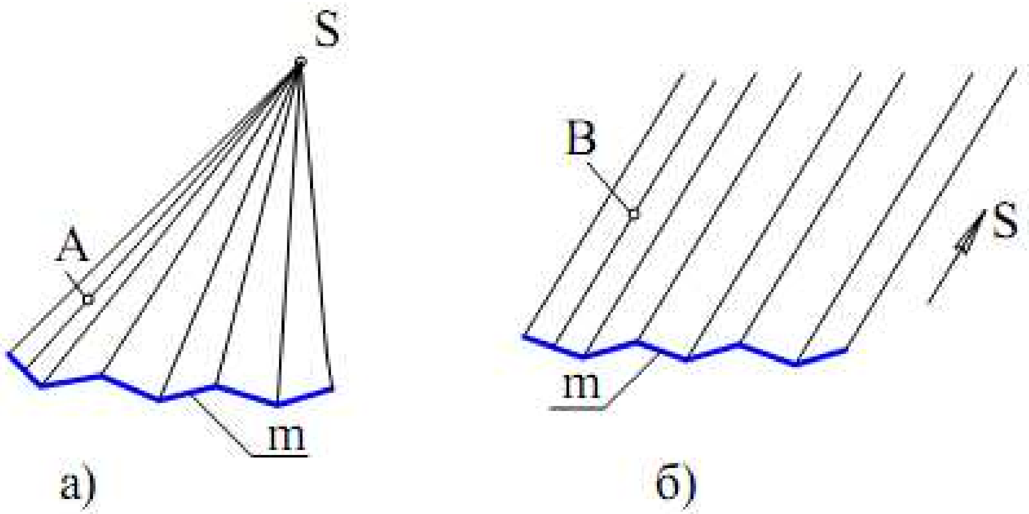


Рис.7.5

Пірамідальною називається поверхня, утворена переміщенням прямолінійної твірної по ламаній напрямній. При цьому всі твірні проходять через деяку нерухому точку S. Визначник поверхні – ламана напрямна **m** і точка **S**.

Призматичною називається поверхня, утворена переміщенням прямолінійної твірної по ламаній напрямній. При цьому всі твірні проходять паралельно деякому заданому напрямку **S**. Визначник поверхні - ламана напрямна **m** і напрямок **S**. Точки **A** і **B** належать пірамідальній і призматичній поверхням відповідно, тому що належать прямим, розташованим на цих поверхнях.

Многогранником називається тіло, поверхня якого складається з кінцевого числа плоских многокутників. Многокутники поверхні називають **гранями**, сторони многокутників – **ребрами**, а вершини многокутників – **вершинами многогранника**. Розглянемо два види многогранників - піраміду і призму.

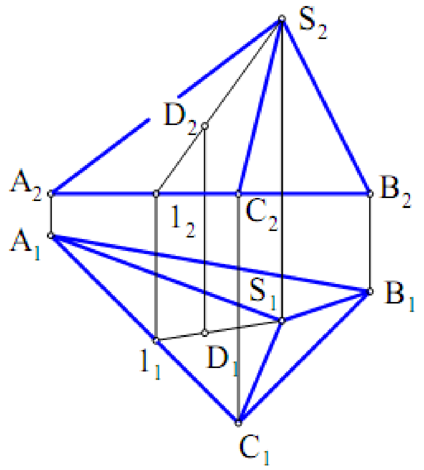


Рис. 7.6

Піраміда являє собою многогранник (рис. 7.6 - це приклад безосного креслення), в якого одна грань − основа (довільний многокутник **ABC**). Інші грані (бічні) − трикутники із загальною вершиною **S**, названою вершиною піраміди. Точка **D** належить поверхні піраміди, тому що лежить на прямій **S_1**, що належить бічній грані **ASC.**

Призмою називається многогранник, в якого основи – рівні многокутники з відповідно паралельними сторонами. Бічні грані призми - паралелограми.

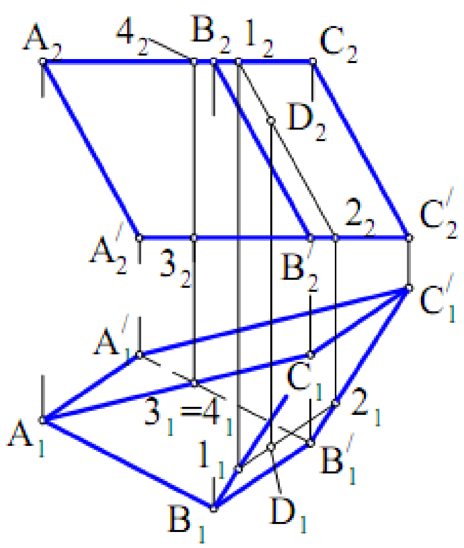


Рис. 7.7

Якщо ребра бічних граней перпендикулярні до основи, то призму називають **прямою**.

На рис. 7.7 наведене комплексне креслення (безосне, як багато наведено нижче) тригранної призми. Видимість ребра **AB** визначена по конкуруючих точках **3** і **4**. Точка **4** розташована вище точки **3**, а виходить, на **$П_1$** проекція точки **3** буде невидимою. Тому що точка **3** належить ребру **1_2**, то воно також буде невидимим.

Точка **D** (рис. 7.7) належить поверхні призми, тому що лежить на прямій **12**, що належить поверхні призми.

7. ПОВЕРХНІ ОБЕРТАННЯ

Поверхнею обертання називається поверхня, отримана при обертовому русі твірної (прямої або кривої) навколо нерухомої прямої, названої віссю обертання (рис. 7.8). Геометричною частиною визначника поверхні обертання є **твірна** і **вісь обертання**.

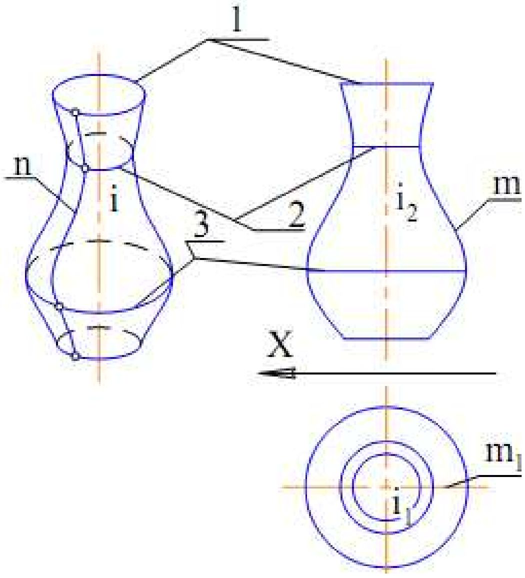


Рис. 7.8

Кожна точка твірної **n** при своєму обертанні описує коло, площина якого перпендикулярна до осі **i**, а центр розташований на осі. Ці кола називаються **паралелями** (на рис. 7.8 – наприклад, коло 1). Найменша з паралелей (коло 2) називається **горлом**, а найбільша (коло 3) – **екватором**.

Площина, що проходить через вісь обертання, називається **меридіальною**, лінія її перетину з поверхнею – **меридіаном**. Якщо меридіальна площина паралельна площині проекцій, то на цю площину меридіан проектується без спотворення. Такий меридіан називається **головним**. На кресленні поверхня обертання однозначно задається своїм визначником.

Однак для наочності креслення поверхні доповнюють нарисами. На рис. 7.9 показана побудова нарисів для поверхні, заданою віссю **i** (**i** $\perp \Pi_1$) і твірною **n**. Візьмемо на твірній **n**(n_1, n_2) довільну точку **1**(1_1, 1_2).

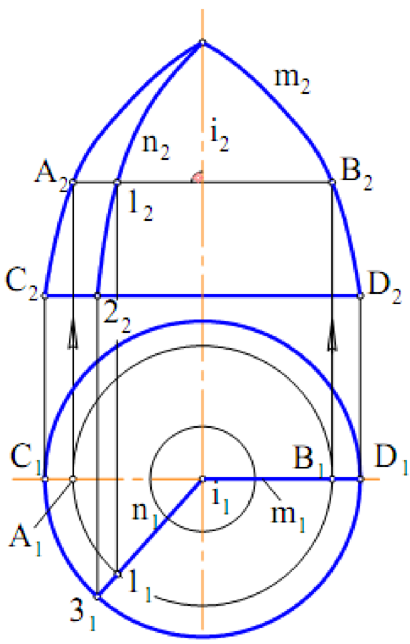


Рис. 7.9

При обертанні твірної навколо осі **i**(i_1, i_2), точка **1** опише коло, площина якого перпендикулярна до осі, а центр розташований на осі. Тому що вісь поверхні перпендикулярна Π_1, то площина кола паралельна Π_1 і коло проектується на Π_1 в коло із центром i_1, що проходить через точку 1_1. На Π_2 коло проектується у відрізок A_2B_2, перпендикулярний i_2 і рівний A_1B_1 діаметру кола). Точки A_2 і B_2 належать фронтальному нарису поверхні.

Виконавши описані вище побудови для інших точок твірної **n** і з'єднавши їх плавною лінією, одержимо фронтальний нарис m_2 поверхні обертання. Горизонтальним нарисом поверхні є коло, що проходить через точки C_1, D_1.

Нижче наведені деякі окремі види поверхонь обертання, для яких показана геометрична частина визначника і побудовані їхні нариси.

Поверхні, утворені обертанням прямої лінії:

а) циліндрична поверхня обертання – отримана обертанням прямої **n** навколо паралельної їй осі **i** (рис. 7.10);

б) конічна поверхня обертання - утворена обертанням прямої **n** навколо пересічної з нею віссю **i** (рис. 7.11);

в) однопорожнинний гіперболоїд обертання - це поверхня, отримана обертанням прямої **n** навколо мимобіжної з нею віссю **i** (рис. 7.12).

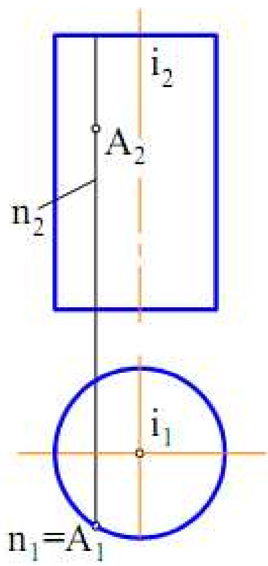


Рис. 7.10

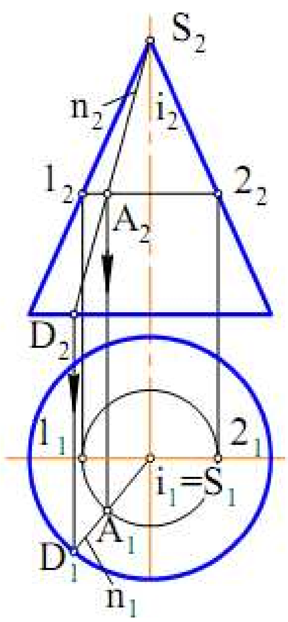


Рис. 7.11

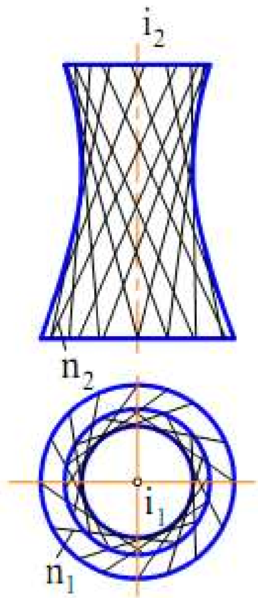


Рис. 7.12

Поверхні, утворені обертанням кривих другого порядку (рівняння такої кривої на площині в декартовій системі координат - алгебраїчне другого ступеня):

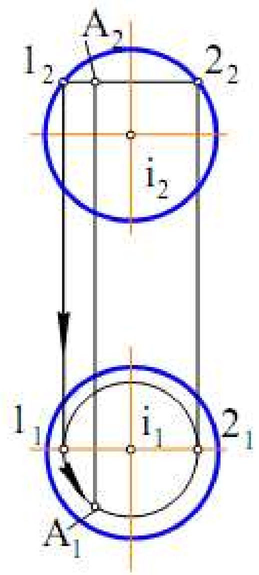
а) **сфера** - поверхня, утворена обертанням кола навколо прямої, яка проходить через її центр (на рис. 7.13 узята вісь, перпендикулярна до $\mathbf{П_1}$);

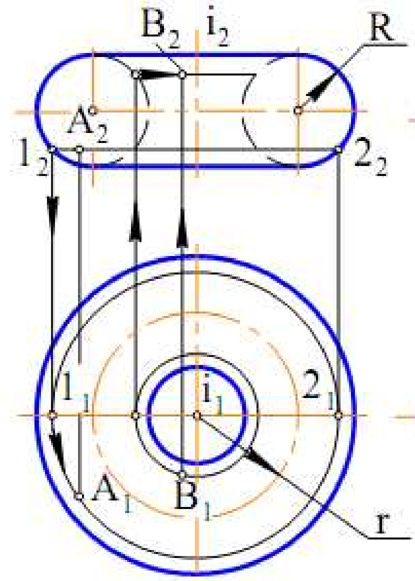
б) **тор** - поверхня, отримана при обертанні кола навколо осі, яка лежить у площині кола, але не проходить через її центр; якщо вісь не перетинає коло, то така поверхня називається **відкритим тором** – $\mathbf{r > R}$ (рис. 7.14), а якщо перетинає або торкається – то **закритим тором** – $\mathbf{r \le R}$ (рис. 7.15);

в) **еліпсоїд обертання** - поверхня, отримана обертанням еліпса навколо його осі; якщо віссю обертання є мала вісь еліпса (рис. 7.16), то виходить стиснутий еліпсоїд обертання, а якщо більша вісь еліпса - то витягнутий еліпсоїд обертання;

г) **параболоїд обертання** - виходить в обертовому русі параболи навколо її осі (рис. 7.17);

д) **двопорожнинний гіперболоїд обертання** - поверхня, утворена обертанням гіперболи навколо її дійсної осі (рис. 7.18);





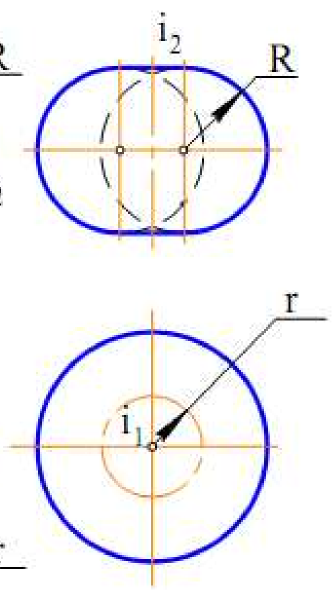
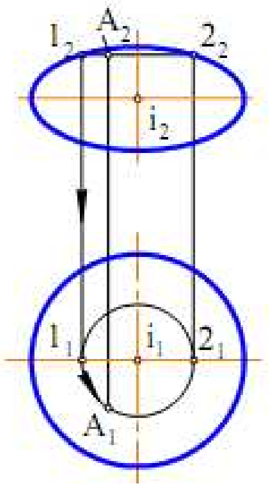
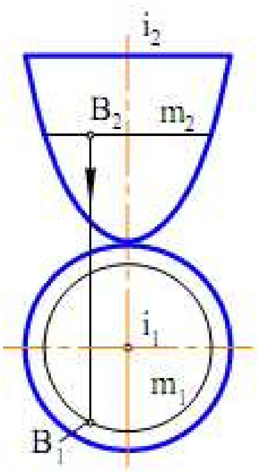
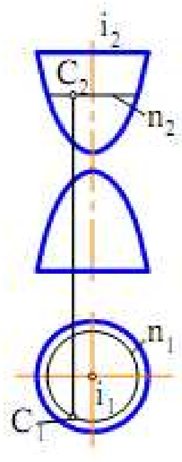


Рис.7.13 Рис.7.14 Рис.7.15







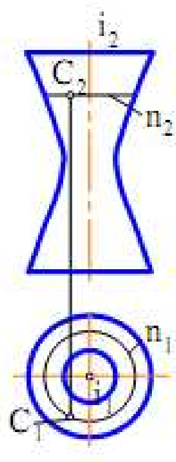


Рис.7.16 Рис.7.17 Рис.7.18 Рис.7.19

е) **однопорожнинний гіперболоїд обертання** - поверхня, утворена обертанням гіперболи навколо її уявної осі (рис. 7.19).

8. ПРИНАЛЕЖНІСТЬ ТОЧКИ І ЛІНІЇ ПОВЕРХНІ ОБЕРТАННЯ

При вирішенні задач на приналежність точки поверхні обертання як графічно прості лінії найбільш часто використовують кола.

Відомо, що точка належить поверхні, якщо вона належить якій-небудь лінії поверхні. Для циліндричної поверхні обертання найбільш простими лініями є прямі (твірні) і кола. Отже якщо потрібно знайти горизонтальну проекцію точки **$A(A_1)$** (по відомій фронтальній проекції **A_2**), що належить циліндричної поверхні, то потрібно через точки провести одну з цих ліній. На рис. 7.10 через **A_2** проведена прямолінійна твірна **$n(n_2)$.** Тому що пряма **n** займає горизонтально - проектуюче положення, то на **$П_1$** вона проектується в точку **n_1** (вважаємо, що проекція твірної на **$П_2$** видима). Тоді в цю ж точку проектується і точка **$A(A_1)$.** З іншого боку, всі кола циліндричної поверхні проектуються на **$П_1$** в одне коло, тому що вісь поверхні перпендикулярна до **$П_1$**.

Отже шукана проекція точки **$A(A_1)$** буде перебувати на цьому колі.

Через точку на конічній поверхні обертання можна також провести пряму і коло. На рис. 7.11 через **A_2** проведені проекції твірної **$n(n_2)$** і кола **$1_2 2_2$**. Відрізок **$1_2 2_2$** дорівнює діаметру кола. Після побудови горизонтальних проекцій цих ліній, визначаємо по лінії проекційного зв'язку горизонтальну проекцію точки **$A(A_1)$**. Вважаємо, що на **$П_2$** проекція точки **$A(A_2)$** – видима (перебуває перед контуром поверхні відносно **$П_2$**). Якщо дано горизонтальну проекцію **A_1**, а потрібно знайти **A_2**, то побудови виконуються у зворотній послідовності.

Побудови горизонтальних проекцій точок по їхніх фронтальних проекціях за умови, що точки належать відповідним поверхням, показані на рис. 7.13, 7.14, а також на рис. 7.16 - 7.18. Як лінії поверхонь використовують кола (траєкторії точок твірних).

Лінія належить поверхні, якщо всі її точки належать поверхні. Якщо відома одна проекція лінії, що належить поверхні, і потрібно побудувати другу її проекцію, то треба на відомій проекції вибрати кілька точок, побудувати відсутні проекції і отримані проекції з'єднати лінією. Вибір кількості точок залежить як від розмірів зображення, так і від складності кривої. У більшості випадків чим більше точок вибирається на вихідній проекції, тим вище точність побудов другої проекції.

На рис. 7.20 показаний відсік конічної поверхні обертання і лінія **n** на цій поверхні. Якщо відомо **n_1**, то для побудови **n_2** можна використати як прямолінійні твірні поверхні, так і кола. На рис. 7.20 фронтальна проекція лінії **n (n_2)** побудована за допомогою кіл. Профільна проекція лінії **$n(n_3)$** побудована по точках ліній **n_1** і **n_2**. Буквами позначені характерні точки лінії (крайні точки, а також приналежні нарисовим утворюючі поверхні), а цифрами - проміжні.

Для встановлення видимості проекцій лінії використаємо контури **t**, **m** і **k** поверхні. Так, при проектуванні на **$П_1$** лінія **n** видима, тому що розташована вище горизонтального контуру **$t(t_1, t_2)$.** Це видно на фронтальній проекції. При проектуванні на **$П_2$** видимою буде ділянка **E4CAB $(E_2 4_2 C_2 A_2 B_2)$,** тому що вона розташована перед фронтальним контуром **m**. Це виходить з горизонтальної проекції. Тоді ділянка, що залишилася, **n_2** буде невидимою. Видимість профільної проекції лінії **n** установлюється при погляді спостерігача на площину **$П_3$**.

Ділянка **E4C$(E_3 4_3 C_3)$,** розташована за профільним контуром **k**, буде невидимою, а що залишилася – видимою.

Це можна встановити по горизонтальній або фронтальній проекціях.

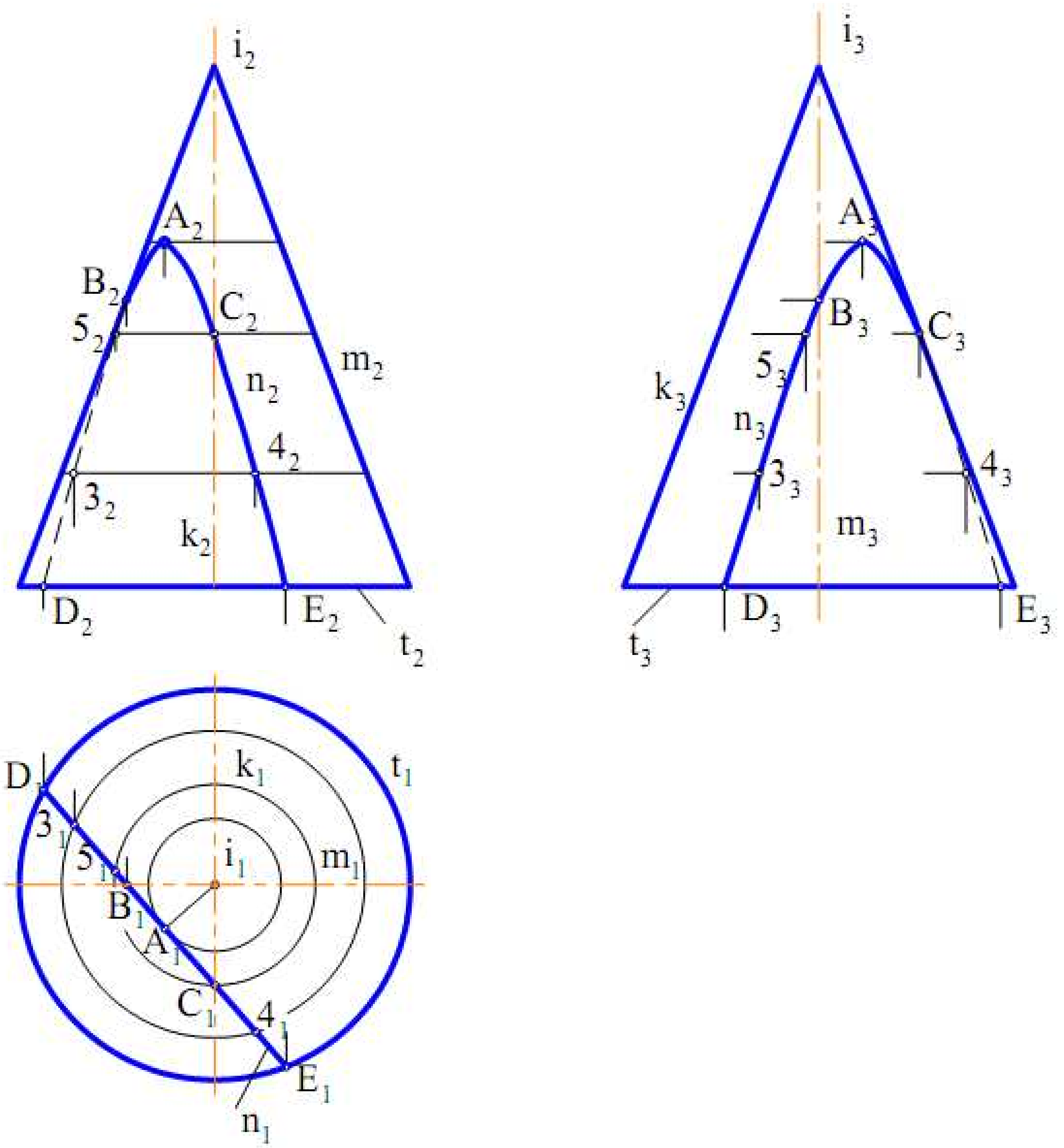


Рис. 7.20

9. ЦИКЛІЧНІ ПОВЕРХНІ

Циклічна поверхня - це множина послідовних положень кола постійного або змінного радіуса, що переміщається у просторі.

Циклічна поверхня загального вигляду задається трьома напрямними **m, n** і **k**.

Одна з них (**n**) задає положення центрів кіл, інша (**m**) – положення площин кіл, а третя (**k**) – радіуси кіл. Зокрема, площини кіл можуть бути перпендикулярні до напрямної **m**. Відстань від центра кола до точки перетину площини кола з напрямною **k** є радіусом цього кола. Якщо одна з напрямних, що задає площини кіл, пряма, то всі кола будуть паралельні до деякої площини, а отримана при цьому поверхня називається циклічною поверхнею з площиною паралелізму. На рис. 7.21,а наведений визначник **Ф(k, m, Σ)** такої поверхні. Твірною є коло **n(n$_1$, n$_2$).** Та ж поверхня з побудованим горизонтальним нарисом і добудованим фронтальним показана на рис. 7.21б. Побудови нарисів виконані в такій послідовності. Через довільну точку **O_2^1** напрямної **k** проведений відрізок **$O_2^1 1_2$**. Точка **O_2^1 –** фронтальна проекція центра кола, а відрізок **$O_2^1 1_2$** – його радіус. Для побудови точки **2_2** від **O_2^1** відкладаємо відрізок **$O_2^1 1_2$**, а на **$П_1$** по лінії проекційного зв'язку визначаємо точку **O_1^1** . Будуємо коло із центром **O_2^1** і радіусом **$O_2^1 1_2$.** Для одержання відсутнього фронтального нарису будуємо ряд точок, аналогічно точці **2_2**. Потім ці точки з'єднуємо. Горизонтальний нарис поверхні являє собою обгинаючу множини кіл, побудованих за аналогією з описаною вище.

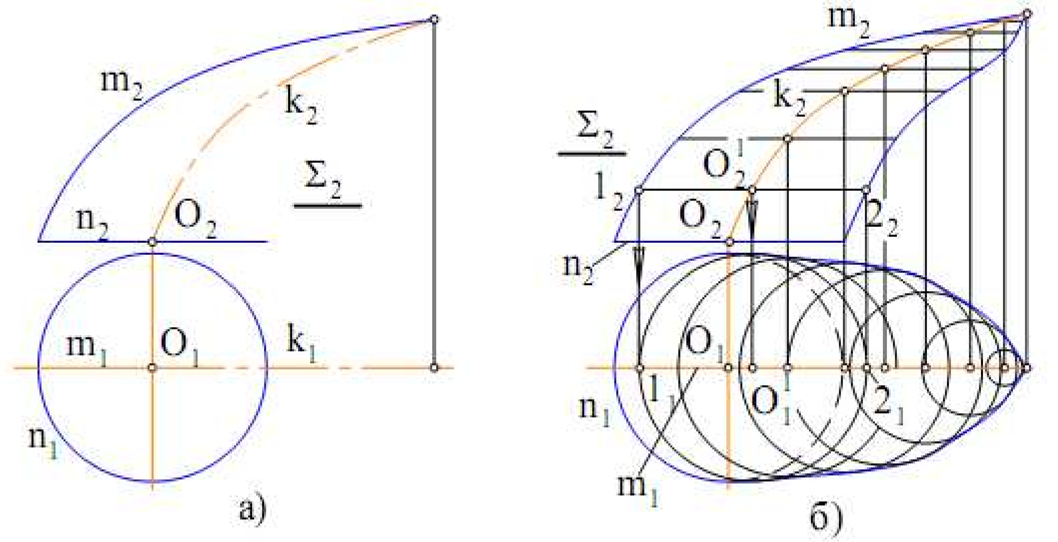


Рис.7.21

Окремими видами циклічної поверхні з площиною паралелізму є поверхні, в яких напрямні **m** і **k** прямі. На рис. 7.22,а показана поверхня, названа еліптичним циліндром, а на рис. 7.22,б - поверхня еліптичного конуса.

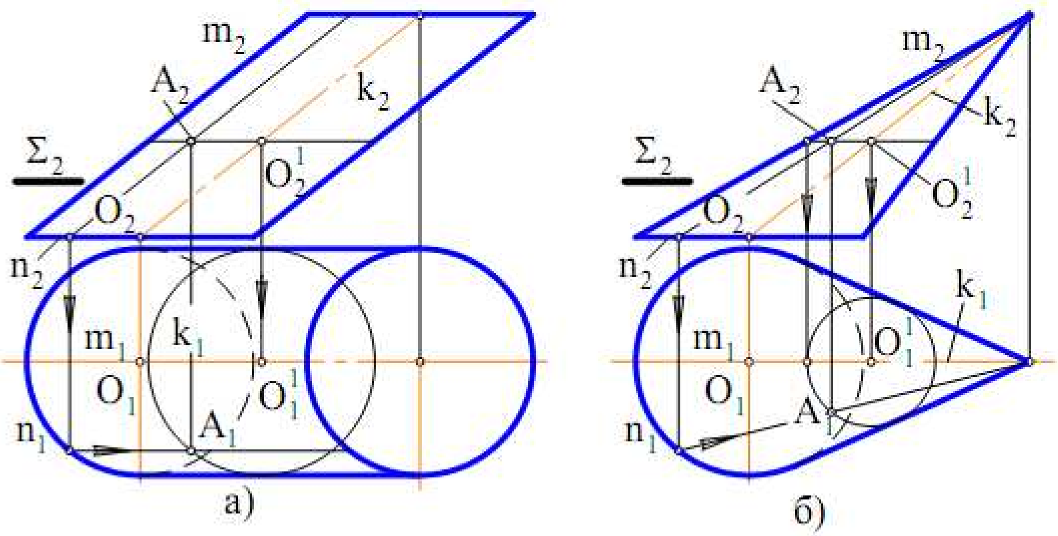


Рис.7.22

Там же показана побудова горизонтальної проекції точки А по відомій фронтальній. Як лінії поверхні використані прямолінійна твірна і коло.

10. ГВИНТОВІ ПОВЕРХНІ

Гвинтовою поверхнею називається поверхня, що описується якою-небудь лінією (твірною) при її гвинтовому русі. Гвинтовим рухом називається складний рух, що складається з рівномірного обертового руху навколо осі і рівномірного прямолінійного руху, паралельного до цій осі. При гвинтовому русі точки виходить гвинтова лінія
(див. рис. 7.23).

Якщо твірною гвинтової поверхні є пряма лінія, то поверхня називається **лінійчатою гвинтовою поверхнею**, або **гелікоїдом**. Гелікоїд називається прямим або похилим залежно від того, перпендикулярна твірна до осі гелікоїда чи нахилена.

Розглянемо деякі види лінійчатих гвинтових поверхонь.

1) Прямий гелікоїд утворюється рухом прямолінійної твірної **m** по двох напрямних. Одна з напрямних є циліндричною гвинтовою лінією **m**, а інша − її віссю **i**. Причому у всіх своїх положеннях твірна **m** паралельна до площини, що називається площиною паралелізму. У прямого гелікоїда твірна **m** перетинає гвинтову вісь **i** під прямим кутом. **Прямий гелікоїд** відноситься до числа коноїдів і називається **гвинтовим коноїдом**.

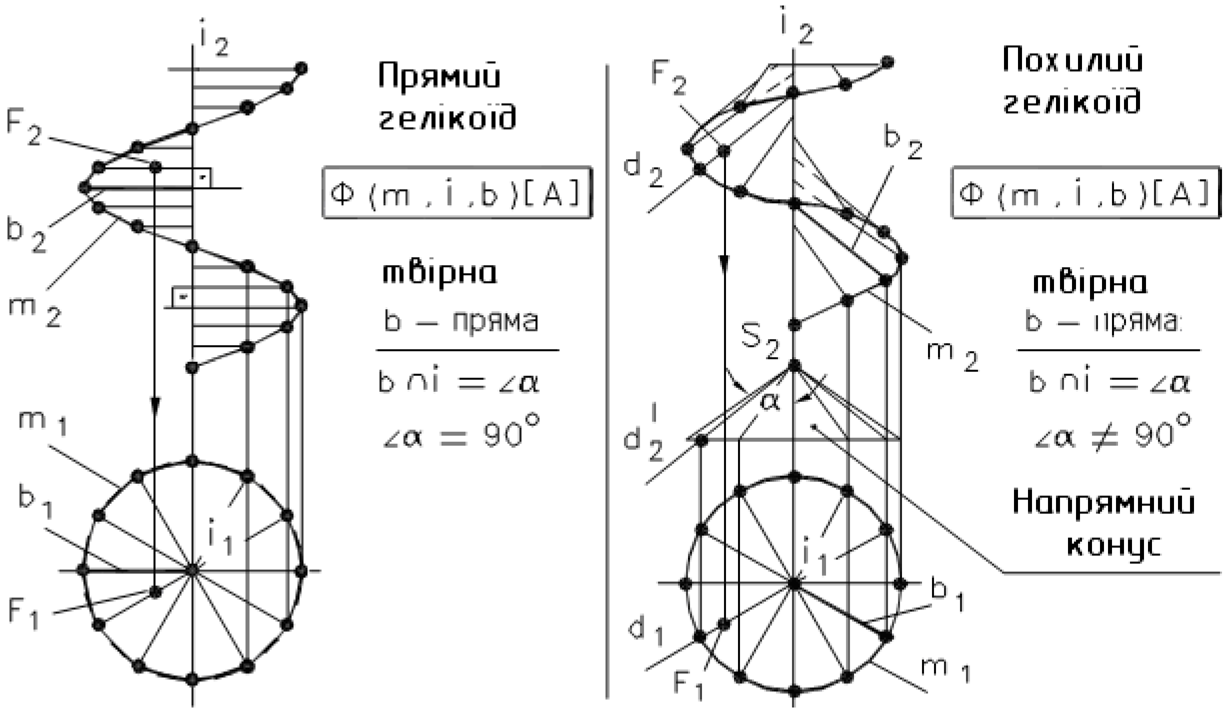


Рис. 7.23

2) Похилий гелікоїд відрізняється від прямого гелікоїда тим, що його твірна **m** перетинає вісь гелікоїда під постійним кутом, не рівним прямому куту. У похилого гелікоїда одна з напрямних є циліндричною гвинтовою лінією **m**, а інша − її віссю **i** . У всіх своїх положеннях твірна **b** паралельна до твірної деякого конуса обертання. У цього конуса кут між твірною і віссю, паралельною до осі гелікоїда, дорівнює α. Він називається напрямним конусом похилого гелікоїда (рис.7.23).

3) Розгортний гелікоїд утворюється рухом прямолінійної твірної **b**, що торкається у всіх своїх положеннях циліндричної гвинтової лінії **m**. Вона є ребром повернення гелікоїда. Розгортний гелікоїд, як лінійчата поверхня з ребром повернення, відноситься до числа торсів.

ЛЕКЦІЯ № 8. ПОБУДОВА ПЕРЕТИНУ ФІГУР. ПЕРЕТИН ПОВЕРХОНЬ

1. ПЕРЕТИН ПОВЕРХНІ І ПЛОЩИНИ

Лінія перетину поверхні з площиною являє собою лінію, названу перетином. Точки цієї кривої можна розглядати як точки перетину ліній поверхні з площиною або прямих площини з поверхнею.

Звідси випливають два варіанти побудови перетину:

1) вибираємо кінцеве число ліній на поверхні й визначаємо точки перетину їх із площиною;

2) виділяємо кінцеве число прямих на площині і будуємо точки перетину їх з поверхнею.

Зазначимо, що можливо вирішення, яке являє собою комбінацію цих варіантів. У кожному разі побудова перетину зводиться до багаторазового застосування алгоритму вирішення задачі на перетин лінії і поверхні.

Визначення проекцій ліній перетину рекомендується починати з побудови його опорних (характерних) точок. До них відносяться точки, розташовані на нарисових твірних поверхні (вони визначають межу видимості проекцій кривої), точки, віднесені на екстремальні відстані від площин проекцій та деякі інші. Після цього визначають проміжні точки перетину.

Побудова перетину істотно спрощується, якщо площина займає проектуюче положення. Це пов'язане з тим, що проектуюча площина характеризується збірною властивістю. У цьому разі одна з проекцій перетину перебуває на сліді площини, тобто відома.

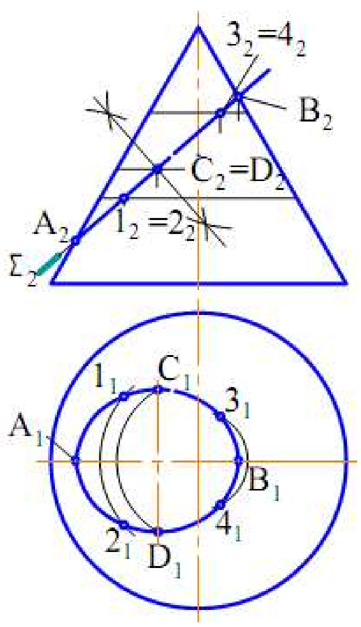


Рис. 8.1

Приклад 1. Побудувати проекції перетину конічної поверхні обертання з фронтально - проектуючою площиною (рис. 8.1).

Вирішення. Задана площина **Σ** перетинає вихідну поверхню по еліпсі, фронтальна проекція якого розташована на сліді цієї площини. Горизонтальну проекцію перетину будуємо по точках відповідно до задачі на приналежність лінії поверхні (див. рис. 8.1). Проекцію еліпса на площині $\mathbf{\Pi_1}$ можна побудувати також по його великій $\mathbf{A_1B_1}$ і малій $\mathbf{C_1D_1}$ осях. Фронтальна проекція малої осі еліпса (точки $\mathbf{C_2}$=$\mathbf{D_2}$) розташована на середині відрізка $\mathbf{A_2B_2}$.

Приклад 2. Побудувати перетин многогранника площиною (рис. 8.2).

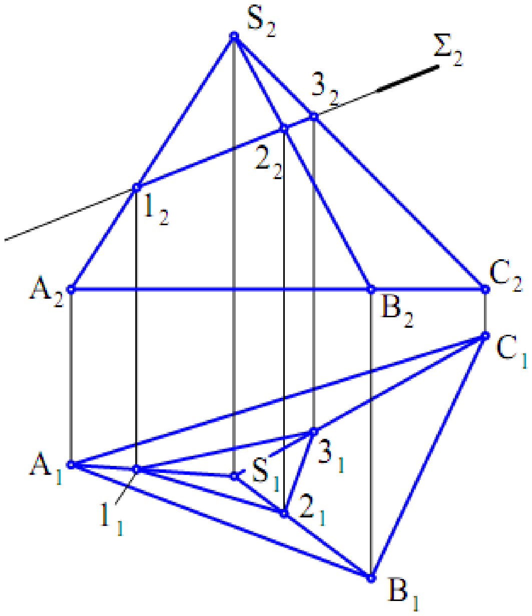


Рис. 8.2

У перетині гранних поверхонь площинами виходять многокутники. Їхні вершини визначаються як точки перетину ребер гранних поверхонь із січною площиною.

Многокутник перетину може бути побудований двома способами:

1) Вершини многокутника знаходяться як точки перетину прямих (ребер) із січною площиною;

2) Сторони многокутника визначають як лінії перетину граней (площин) многогранника із січною площиною.

На рис. 8.2 показана побудова перетину піраміди площиною **Σ**. Січна площина є що фронтально - проектуючою, отже всі лінії, що лежать у цій площині, збігаються з фронтальним слідом $\mathbf{\Sigma_2}$ площини **Σ**. Отже фронтальна проекція $\mathbf{1_2 2_2 3_2}$ перетину визначиться при перетині фронтальних проекцій ребер піраміди із слідом $\mathbf{\Sigma(\Sigma)_2}$. Горизонтальні проекції точок **1(11), 2(21)** і **3(31)** знаходимо з умови приналежності точок ребрам піраміди.

Приклад 3. Побудувати лінію перетину циліндричної поверхні обертання з площиною $\mathbf{\Sigma(\Sigma)_2}$ (рис. 8.3).

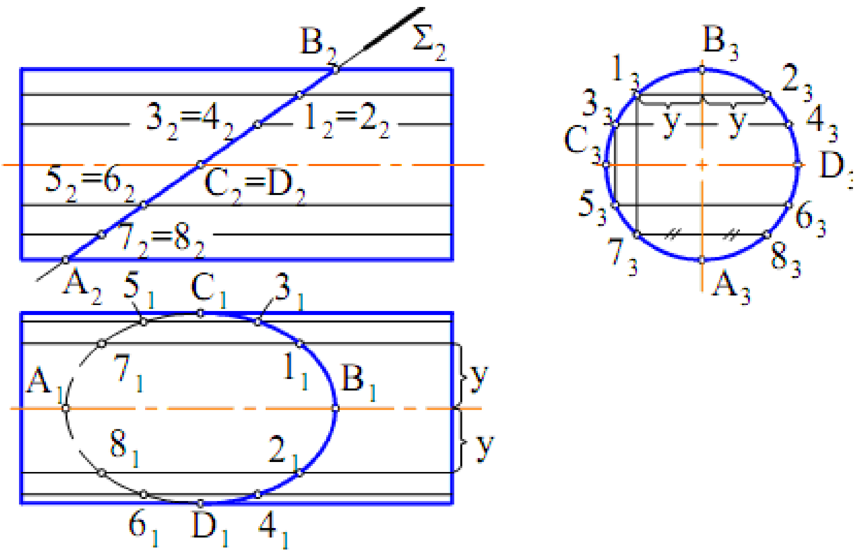


Рис.8.3

Вирішення. Спочатку знаходимо опорні точки $\mathbf{A(A_1, A_2)}$, $\mathbf{B(B_1, B_2)}$, $\mathbf{C(C_1, C_2)}$ **і** $\mathbf{D(D_1, D_2)}$. Точки **A** і **B** визначають у перетині твірного фронтального контуру поверхні й площини **Σ** (спочатку визначаємо $\mathbf{A_2}$ і $\mathbf{B_2}$, а потім по лініях проекційного зв'язку – $\mathbf{A_1}$ і $\mathbf{B_1}$). Точки **C** і **D** є точками перетину горизонтального контура поверхні й площини **Σ**. На $\mathbf{\Pi_2}$ горизонтальний контур збігається з проекцією осі поверхні обертання, а на Π_1 є нарисом. Тоді спочатку будуємо C_2 і D_2, а потім C_1 і D_1.

Точки $1(1_1, 1_2), 2(2_1, 2_2), \dots, 8(8_1, 8_2)$ – це проміжні точки перетину. Вони побудовані введенням проміжних прямолінійних твірних поверхні. Спочатку проводимо проекції твірних на Π_2, наприклад через точки 1_2, 2_2 (твірні – фронтально конкуруючі). На Π_3 ці твірні проектуються в точки 1_3 і 2_3. Горизонтальні проекції твірних побудовані по двох заданих, як показано на рис. 8.3, відклавши відповідні значення координати **Y**.

2. ПЕРЕТИН КОНІЧНОЇ ПОВЕРХНІ ОБЕРТАННЯ ПЛОЩИНОЮ

Залежно від напрямку січної площини в перетині конічної поверхні обертання можуть вийти різні лінії. Вони називаються конічними перерізами. На рис. 8.4 наведена фронтальна проекція конічної поверхні обертання (вісь **i** паралельна Π_2) і фронтально проектуючі площини Σ_2^1, Σ_2^2…, Σ_2^5. На рис. 8.5 показані наочні зображення результатів перетину площинами тіл, обмежених конічною поверхнею обертання.

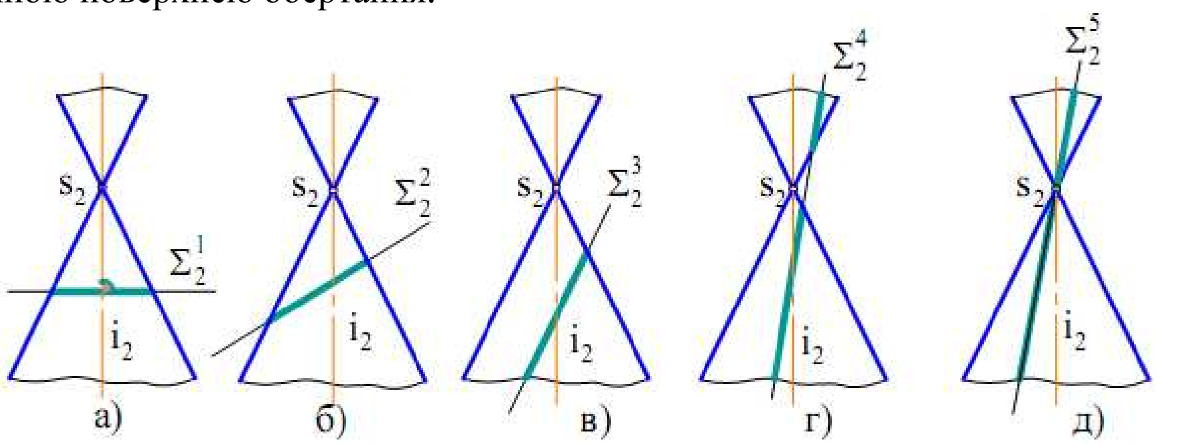


Рис. 8.4

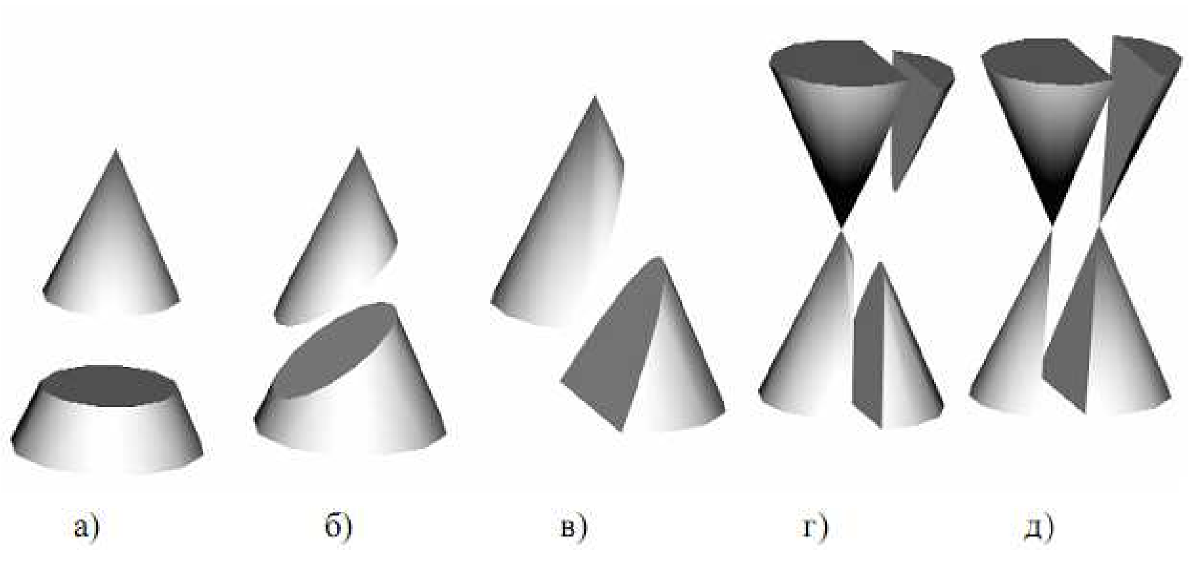


Рис.8.5

У результаті перетину конуса площиною, перпендикулярної до осі конуса, виходить **коло** (рис. 8.4,а; 8.5,а).

Еліпс виходить у тому випадку, якщо січна площина перетинає всі твірні поверхні і не перпендикулярна до осі **i** (рис. 8.4,б; 8.5,б).

Площина $\boldsymbol{\Sigma_2^3}$ паралельна до однієї твірної поверхні і перетинає одну половину конічної поверхні. Перетином є **парабола** (рис. 8.4,в; 8.5,в).

Площина $\boldsymbol{\Sigma_2^4}$ паралельна двом твірним і перетинає обидві половини конічної поверхні (перетин – **гіпербола**) (рис. 8.4,г; 8.5,г).

Площина $\boldsymbol{\Sigma_2^5}$ проходить через вершину конічної поверхні (перетин – дві пересічні прямі) (рис. 8.4,д; 8.5,д).

3. ПЕРЕТИН ЛІНІЇ І ПОВЕРХНІ

Лінія і поверхня перетинаються в загальному випадку в декількох точках **А, В, .** Алгоритм їх визначення може бути побудований на тих же міркуваннях, що й при побудові точки перетину прямої і площини. Дійсно, точки **А, В, …** перетину лінії **m** і поверхні **Θ** належать також лініям, що проходять через ці точки й лежать на заданій поверхні. Криву **n** можна розглядати як проекцію лінії **m** на поверхню **Θ**. Тоді, у випадку паралельного проектування, лінії **n** і **m** будуть розташовуватися на одній циліндричній поверхні, в якої напрямною є крива **m**, а твірні паралельні напрямку проектування. Якщо лінія пряма, то **n** і **m** перебувають в одній площині **Σ** (рис. 8.6). Якщо напрямок

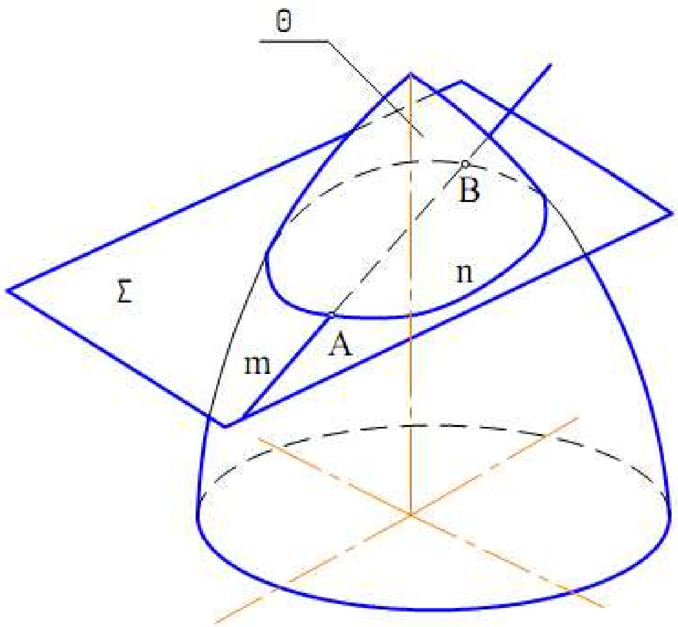


Рис. 8.6

проектування буде перпендикулярним до якої-небудь площини проекцій, лінії **n** і **m** будуть конкуруючими щодо відповідної площини проекцій.

Приклад 1. Дано пряму **m** і тор. Побудувати точки перетину прямої і поверхні (рис. 8.7).

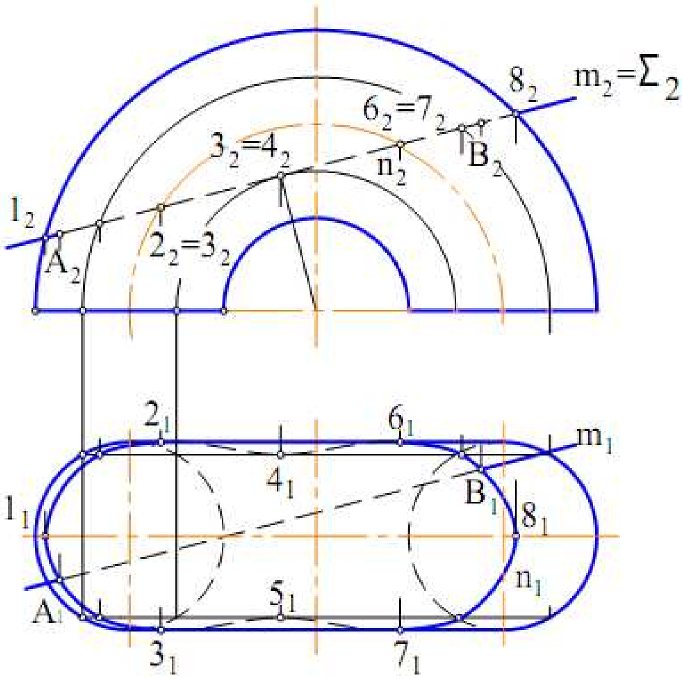


Рис. 8.7

Вирішення.

1) Вибираємо на заданій поверхні лінію **n**, наприклад, що фронтально конкурує із заданою прямою **m**. Лінії **n** і **m** перетинаються, тому що вони перебувають в одній фронтально проектуючій площині.

2) Визначаємо горизонтальну проекцію лінії **n** **(n_1),** виходячи з умови приналежності її поверхні.

3) Знаходимо точки **A** і **B** перетину ліній **n** і **m**, які і є шуканими.

4) Установлюємо видимість проекцій прямій. Так, як ділянка **AB** прямої **m**, розташована усередині поверхні, то вона невидима на Π_1 і Π_2**.** Крім цього, на Π_2 невидимий відрізок прямої **m** правіше точки B_2 до точки на нарисі поверхні, а на Π_1 – лівіше точки 5_1, також до точки на нарисі поверхні. Ці відрізки закриті поверхнею - перебувають за контурами поверхні.

Приклад 2. Дано криву **n** і циліндроїд **Г(a, b, Σ)** (рис. 8.8). Побудувати точки перетину лінії і поверхні.

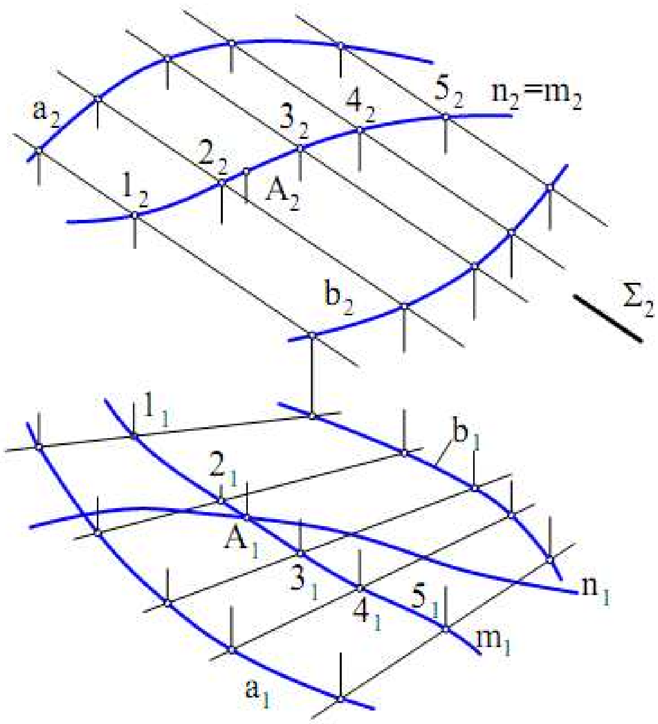


Рис. 8.8

Вирішення.

1) На поверхні циліндроїда вводимо криву **m**, що фронтально конкурує з лінією **n**. Ці криві перетинаються (у загальному випадку), тому що розташовані на одній циліндричній поверхні, яка є фронтально проектуючою, у якої лінія **n** - напрямна, а твірні перпендикулярні Π_2.

2) Будуємо горизонтальну проекцію кривої **m(m_1) (m⊂Г).**

3) Знаходимо горизонтальну проекцію точки **A(A_1) -** $A_1 = n_1 \cap m_1$, а потім і $A_2(A_2 \subset n_2)$.

Приклад 3. Дано пряму **n** і конічну поверхню (рис. 8.9). Побудувати точки перетину лінії і поверхні.

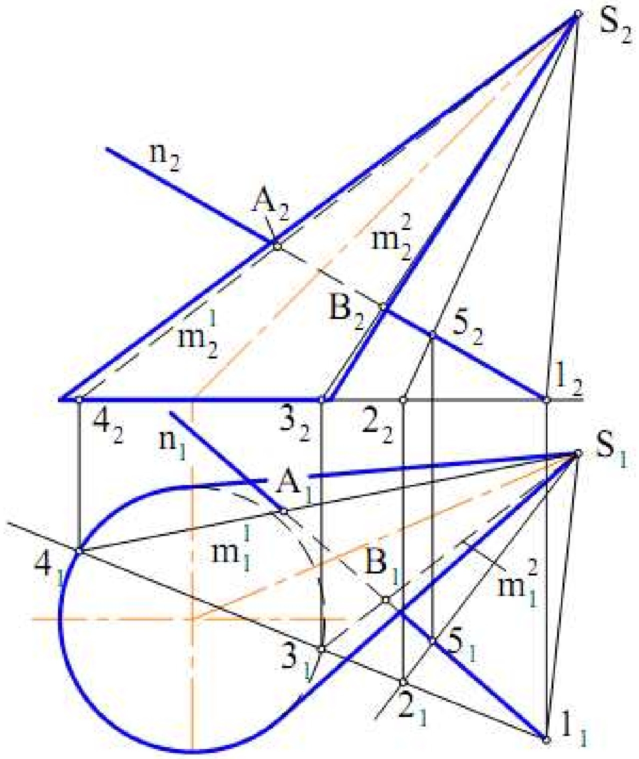


Рис. 8.9

Вирішення. Поставлену задачу можна також розв'язати, задавши на конічній поверхні лінію **m**, що конкурує із прямою **n** щодо площини проекцій Π_1 або Π_2. Отримані криві будуть лекальні, що вимагає значних побудов і знижує точність рішення задачі. Тому що задана поверхня лінійчата, то в якості лінії **m** на поверхні доцільно взяти пряму (або прямі). Тоді алгоритм вирішення задачі буде наступним:

1) Спроектуємо з точки **S** пряму **n** на площину Π_1, тобто визначимо центральну проекцію прямої **n** на площині Π_1. Для цього проводимо два проектуючих променя через точки, **1** і **5** прямої до перетину із площиною проекцій Π_1. Точки **1** і **2**задають центральну проекцію прямої **n** на Π_1.

2) Будуємо твірні m_1 і m_2 на конічній поверхні, що конкурують із **n** відносно Π_1 при її центральному проектуванні.

3) Знаходимо точки **A** і **B** перетину прямої **n** з твірними m_1 і m_2 Точки **A** і **B** - шукані.

4) Установлюємо видимість проекцій прямої **n**.

4. ВЗАЄМНИЙ ПЕРЕТИН ПОВЕРХОНЬ

Лінія перетину двох поверхонь являє собою в загальному випадку просторову криву. Будь-яка точка цієї лінії належить як першій, так і другій поверхням і може бути визначена в перетині ліній, проведених на цих поверхнях. Тоді маємо наступні варіанти вирішення даної задачі:

1) вибирають на одній з поверхонь кінцеве число ліній і будують точки перетину їх з іншою поверхнею (див. 8.3);

2) виділяють на заданих поверхнях два сімейства ліній і знаходять їхні точки перетину. У другому варіанті виділення пересічних пар кривих виконують за допомогою допоміжних поверхонь посередників.

Розглянемо докладніше алгоритм вирішення задачі з використанням поверхонь посередників.

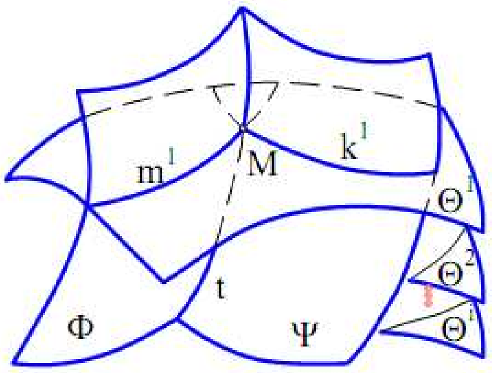


Рис. 8.10

Цей спосіб полягає в наступному. Нехай дано пересічні поверхні **Φ** і **Ψ** (рис. 8.10). Введемо допоміжну січну поверхню $\mathbf{\Theta^1}$**.** Ця поверхня називається посередником. Вона перетне поверхні **Φ** і **Ψ** по лініях $\mathbf{m^1}$ і $\mathbf{k^1}$, відповідно. Перетин ліній $\mathbf{m^1}$ і $\mathbf{k^1}$ дасть точку **M**, що належить шуканій лінії перетину **t**, тому що вона належить обом поверхням. Вводячи ряд посередників, одержуємо сімейство точок лінії перетину.

Як поверхні посередники найбільш часто застосовують площини або сфери. Залежно від виду посередників виділяють наступні найбільш часто застосовувані способи побудови лінії перетину двох поверхонь:

а) **спосіб січних площин**;

б) **спосіб сфер**.

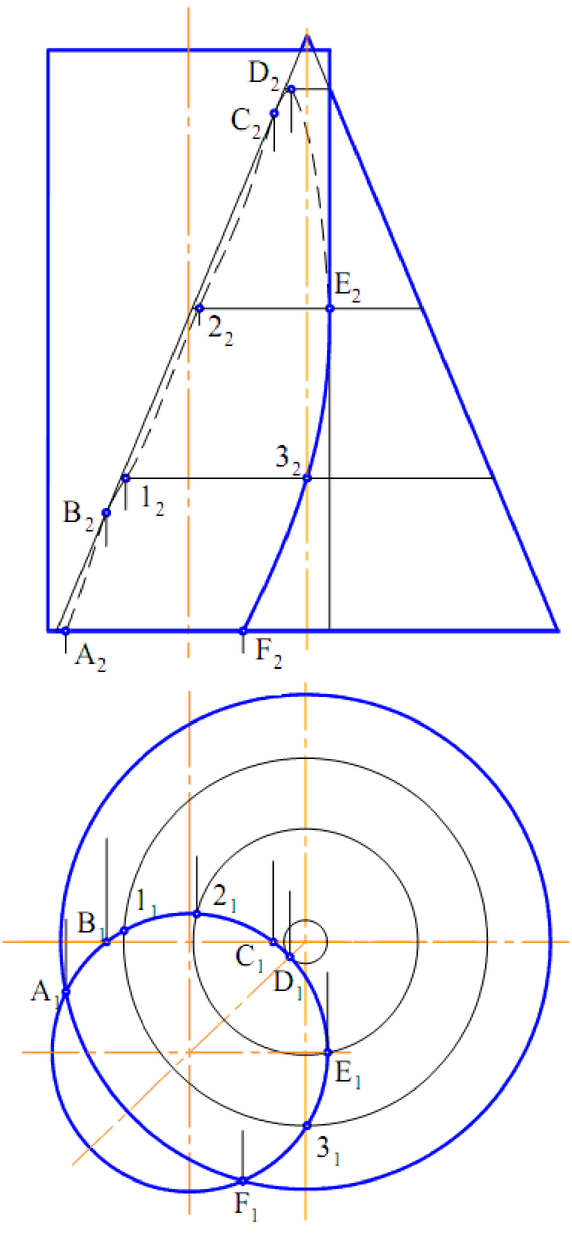


Рис. 8.11

Посередники вибирають так, щоб лінії $\mathbf{m^i}$ і $\mathbf{k^i}$ можна було легко побудувати, тобто щоб вони були графічно простими (прямі або кола). Завдання спрощується, якщо одна з поверхонь займає проектуюче положення. Тоді ця поверхня вироджується в коло (циліндрична) або многокутник (призматична). Одна з проекцій шуканої лінії буде перебувати на виродженій проекції поверхні, а друга - виходить, відома. Друга проекція лінії визначається з умови приналежності її поверхні. На рис. 8.11 показана побудова лінії перетину циліндричної і конічної поверхонь обертання. Тому що вісь циліндричної поверхні перпендикулярна до $\mathbf{\Pi_1}$, то на $\mathbf{\Pi_1}$ поверхню проектується в коло. На це ж коло проектується і шукана лінія. Точки **A, B, C, D, E** і **F** – опорні точки. Точки **A** і **F** належать горизонтальному, а точка **E** – фронтальному контуру циліндричної поверхні На фронтальному контурі конічної поверхні розташовані точки **B** і **C**. Точка **D** – екстремальна.

Інші точки лінії перетину, позначені цифрами, - проміжні. Фронтальні проекції лінії побудовані з умови приналежності її до конічної поверхні.

4.1. Спосіб допоміжних січних площин

Розглянемо застосування допоміжних січних площин на прикладі побудови лінії перетину сфери з конусом обертання (рис. 8.12, 8.13).

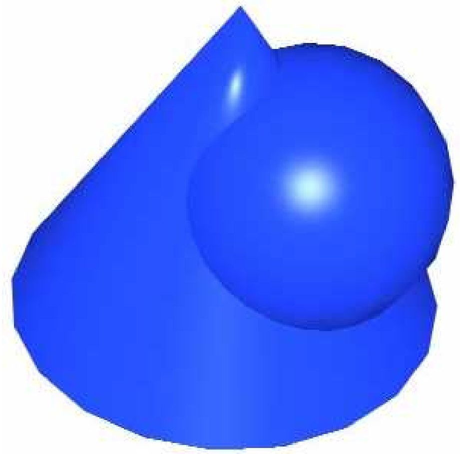


Рис. 8.12

Вирішення. Задані поверхні – поверхні обертання. Осі заданих поверхонь паралельні $\mathbf{П_2}$, (будь-який діаметр сфери може бути прийнятий за вісь обертання), а їхня загальна площина симетрії паралельна фронтальній площині проекцій. Отже на заданих поверхнях можна виділити два сімейства кіл, розташованих у площинах, паралельних до горизонтальної площини проекцій. Це значить, що для вирішення даної задачі можна використати як посередників горизонтальні площини рівня.

Характерними точками проекцій лінії перетину поверхонь є точки **A, B** і **3, D.** Точки **A, B** визначають у перетині нарисових твірних поверхонь, тому що ці

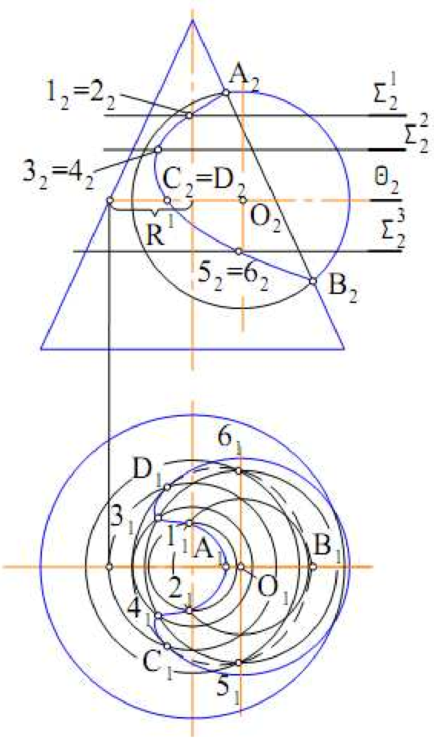


Рис. 8.13

твірні розташовані в спільній площині симетрії поверхонь. Точки **C** і **D** є точками видимості горизонтальної проекції лінії перетину. Їхні побудови виконані в такій послідовності:

1) через центр сфери **O** проведена горизонтальна площина рівня **Θ**;

2) побудована горизонтальна проекція кола радіуса $\mathbf{R^1}$, по якій площина **Θ** перетинає конічну поверхню; ця ж площина перетинає сферу по екватору (колу максимального радіуса);

3) побудована горизонтальна проекція кола радіуса $\mathbf{R^1}$, по якій площина **Θ** перетинає конічну поверхню; ця ж площина перетинає сферу по екватору (колу максимального радіуса);

4) визначені точки $\mathbf{C_1}$, $\mathbf{D_1}$ перетину кола радіуса $\mathbf{R^1}$ з нарисом сфери;

5) визначені фронтальні проекції точок **3(3$_2$), D(D$_2$)** з умови приналежності їх до площини **Θ.** Для побудови проміжних точок **1(1$_1$,1$_2$), 2(2$_1$,2$_2$), …, 6(6$_1$,6$_2$)** лінії перетину заданих поверхонь використаємо площини Σ_2^1 , Σ_2^2 **і** Σ_{23}. Отримані точки з'єднаємо плавною кривою лінією. Видимість лінії перетину визначається на кожній поверхні окремо. Потім визначаються ділянки, видимі одночасно для обох поверхонь. Так, при проектуванні конічна поверхня своїх точок не закриває, а сфера закриває точки, розташовані нижче горизонтального контуру. Точки **C** і **D**, розташовані на горизонтальному нарисі, відокремлюють видиму частину лінії від невидимої. Невидима частина показана штриховою лінією. На Π_2 проекції видимої частини лінії перетину збігаються з проекцією невидимої, тому що фронтальні нариси обох поверхонь розташовані в площині симетрії поверхонь.

4.2. Спосіб концентричних сфер

Цей спосіб широко використовують при вирішенні задач на побудову ліній перетину поверхонь обертання з пересічними осями. В основі цього способу лежить наступна властивість поверхонь обертання: дві співвісні поверхні обертання перетинаються по колах, число яких дорівнює числу точок перетину їх напівмеридіанів. Ці кола лежать у площинах, перпендикулярних до осі поверхонь обертання. У сфери будь-який діаметр можна прийняти за вісь обертання. Отже сфера з центром на осі поверхні обертання перетинає цю поверхню по одному або декількох колах.

Якщо вісь поверхонь обертання паралельна до площини проекцій, то на цю площину лінія перетину проектується у відрізок прямої лінії.

На рис. 8.14,а,б показаний перетин сфери циліндричною і конічною поверхнями обертання, відповідно. На рис. 8.14,в наведені пересічні співвісні циліндрична й конічна поверхні обертання.

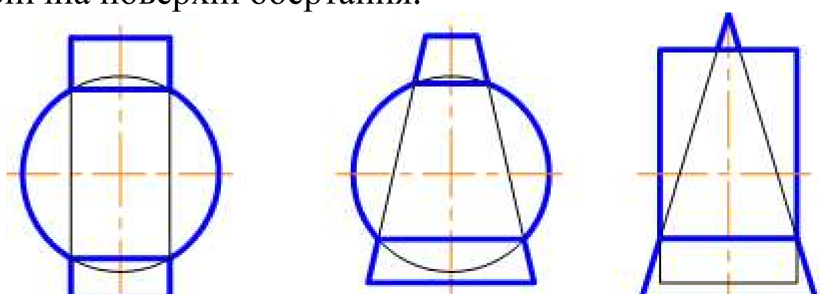


Рис.8.14

Розглянемо застосування **допоміжних концентричних сфер** - сфер з постійним центром. Цей спосіб застосовують при виконанні наступних умов:

а) **пересічні поверхні повинні бути поверхнями обертання**;

б) **осі цих поверхонь повинні перетинатися; точку їхнього перетину приймають за центр допоміжних сфер**;

в) **площина симетрії поверхонь повинна бути паралельна до якої-небудь площини проекцій (у протилежному разі застосовують перетворення креслення)**.

Розглянемо побудову лінії перетину конічних поверхонь обертання.

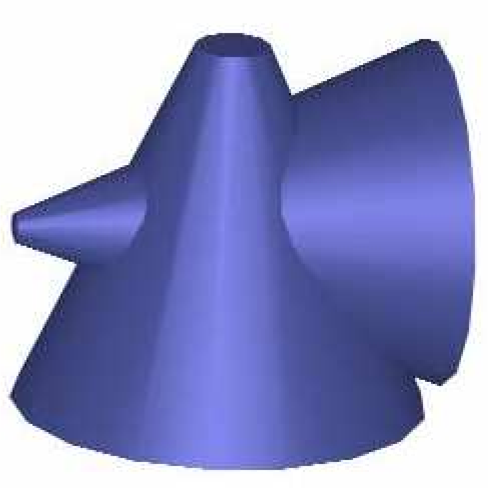


Рис. 8.15

На рис. 8.15 показане наочне зображення, а на рис. 8.16 - комплексне креслення цих поверхонь. Поверхні і їхнє розташування задовольняють наведеним вище умовам. Перш ніж будувати проміжні точки, необхідно знайти опорні точки лінії перетину. Точки **A, B, K** і **L**, а також **E, F, C** і **D** – це точки, приналежні контурам поверхонь. Їх можна знайти способом концентричних сфер або за допомогою площин посередників $\mathbf{\Sigma(\Sigma_2)}$ і $\mathbf{\Delta(\Delta_1)}$. Розглянемо тепер побудову проміжних точок на прикладі точок **5** і **6**.

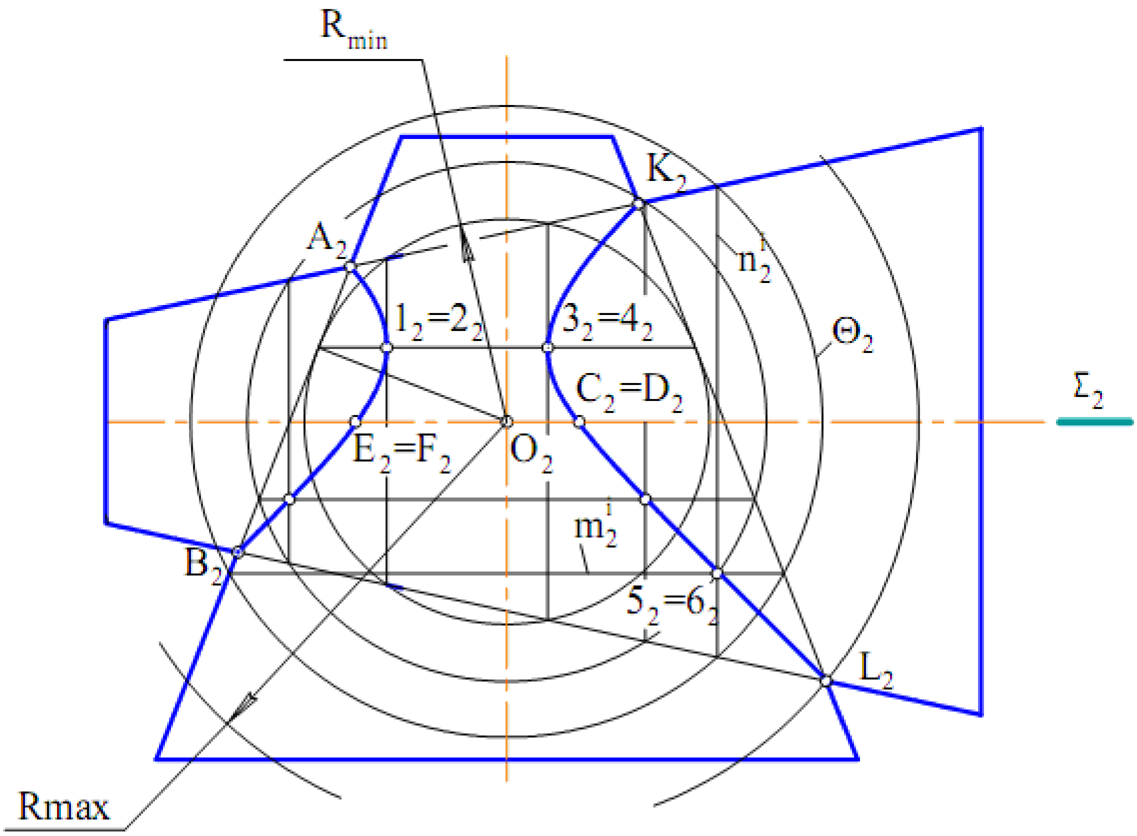
Побудови виконаємо на фронтальній площині проекцій. Сфера посередник $\mathbf{\Theta(\Theta_2)}$ із центром у точці $\mathbf{O(O_2)}$ перетинає конічні поверхні по колах, які на $\mathbf{\Pi_2}$ проектуються у відрізки $\mathbf{m'(m'_2)}$ і $\mathbf{n'(n'_2)}$ (проекції двох інших кіл не показані). Точки $\mathbf{5_2}$ **і** $\mathbf{6_2}$ їхнього перетину є фронтальними проекціями точок **5** і **6**, які належать лінії перетину поверхонь, тому що належать кожній із цих поверхонь. Горизонтальні проекції точок **5** і **6** знаходимо з умови приналежності точки поверхні. У цьому випадку використовується приналежність точок до кола $\mathbf{m^i}$ на «вертикальній» конічній поверхні. Точки $\mathbf{5_1}$ і $\mathbf{6_1}$ визначають по лінії проекційного зв'язку на $\mathbf{m^i}$ $(\mathbf{m^i}_1)$.

Аналогічно можна побудувати будь-яку кількість точок шуканої лінії перетину. Однак слід мати на увазі, що не всі сфери можуть бути використані для рішення задачі. Розглянемо граничні межі допоміжних сфер. Радіус сфер посередників змінюється в діапазоні **Rmax ≥ R ≥ Rmin**, де **Rmin** – мінімальний радіус сфери, **Rmax** – максимальний радіус сфери.

Сфера мінімального радіуса **Rmin** – це сфера, що торкається однієї поверхні і перетинає іншу (або теж торкається). На рис. 8.16 така сфера торкається «вертикальної» конічної поверхні. За допомогою сфери мінімального радіуса побудовані точки $\mathbf{1_2=2_2}$ і $\mathbf{3_2=4_2}$. Горизонтальні проекції точок **1, 2, 3** і **4** побудовані аналогічно точкам **5** і **6**.

Радіус максимальної сфери дорівнює відстані від точки перетину осей поверхонь до самої віддаленої точки перетину контурних твірних цих поверхонь. На рис 8.16 – **Rma**x =$\mathbf{|O_2L_2|}$.

Для встановлення видимості проекцій лінії перетину аналізуємо розташування точок щодо контурів поверхонь. Так, відносно $\mathbf{\Pi_1}$, видимою буде ділянка кривої, розташована вище контуру горизонтальної конічної поверхні (друга поверхня на видимість на $\mathbf{\Pi_1}$ не впливає). Горизонтальна проекція невидимої частини лінії показана штриховою лінією.



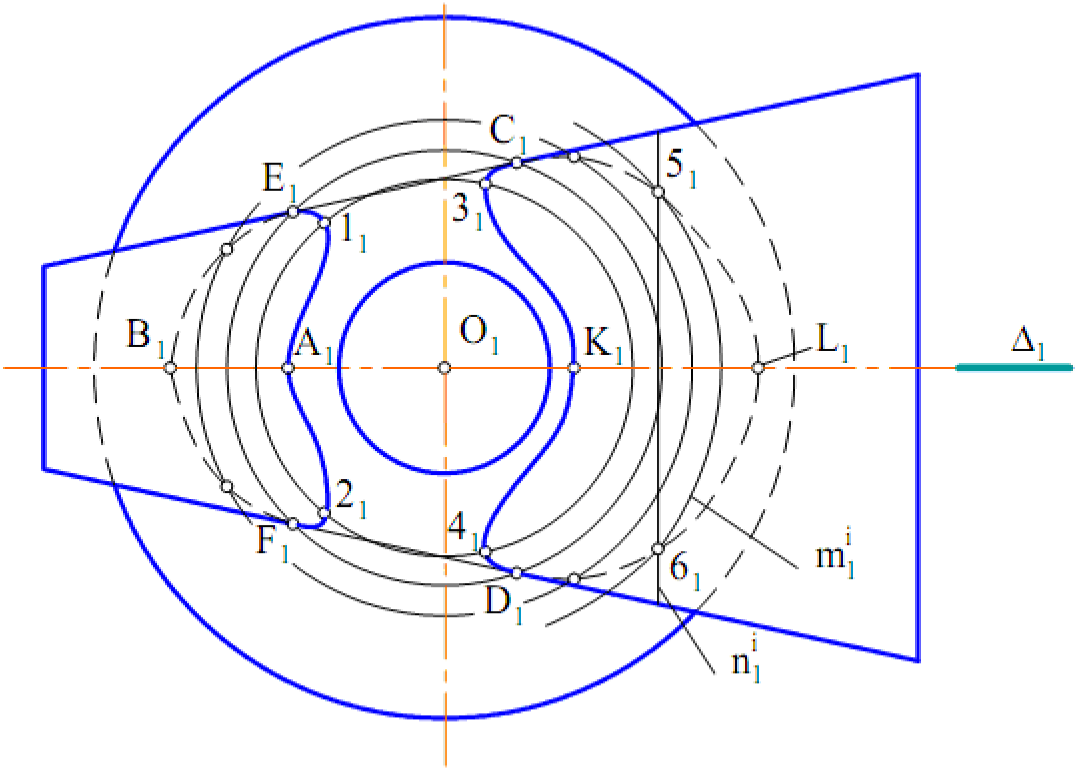


Рис.8.16

Точки **A, B** і **K, L** належать фронтальним контурам поверхонь і відокремлюють видиму частину лінії перетину від невидимої при проектуванні на $\mathbf{П_2}$. Фронтальні проекції видимої і невидимої частин лінії перетину на рис. 8.16 збігаються.

4.3. Спосіб ексцентричних сфер

Спосіб ексцентричних сфер застосовують за умови, якщо:
1) **одна з поверхонь - поверхня обертання, а інша - циклічна (має сімейство кіл);**
2) **поверхні мають спільну площину симетрії**;
3) **спільна площина симетрії паралельна площині проекцій (у протилежному разі варто застосувати перетворення креслення**).

Приклад 1. Побудувати фронтальну проекцію лінії перетину поверхонь **Σ** і **Θ**, спільна площина симетрії яких паралельна $\mathbf{П_2}$ (рис. 8.17).

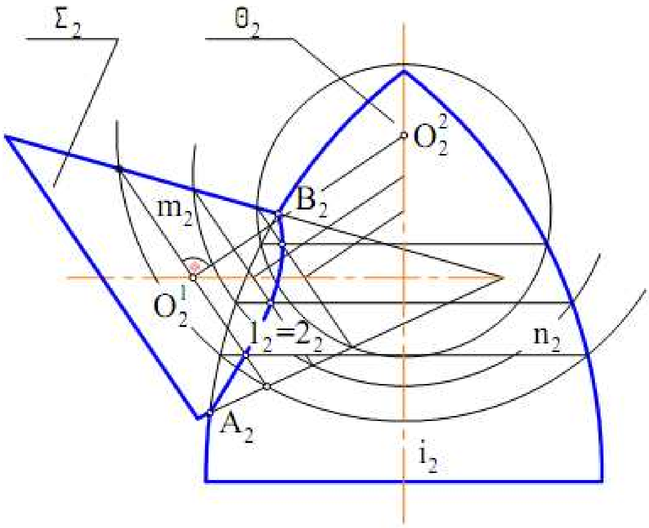


Рис. 8.17

Вирішення. Задані поверхні і їхнє розташування задовольняють умовам застосовності способу ексцентричних сфер, що і використаємо для вирішення поставленої задачі. Опорними точками є точки $\mathbf{A(A_2)}$ і $\mathbf{B(B_2)}$, розташовані в перетині нарисових твірних. Побудову проміжних точок виконуємо в такій послідовності:
1) проводимо на конічній поверхні коло, яке розташоване в площині, паралельній її основі і на $\mathbf{П_2}$ проектується у відрізок – $\mathbf{m(m_2)}$;

2) проводимо перпендикуляр до площини кола **m** через його центр $\mathbf{O^1}$ і знаходимо центр $\mathbf{O^2}$ сфери-посередника;

3) проводимо проекції сфери з центром у точці $\mathbf{O^2}$ за допомогою крайніх точок кола $\mathbf{m(m_2)}$;

4) будуємо коло $\mathbf{n(n_2)}$, по якій сфера перетинає поверхню обертання **Θ**;

5) визначаємо точки $\mathbf{1_2=2_2}$ перетину побудованих кіл.

Проекції інших точок лінії перетину визначаємо аналогічно.
На $\mathbf{П_2}$ проекції видимої і невидимої ділянок лінії перетину збіжаться.

Примітка. Запропонуйте вирішення цієї задачі, використовуючи друге сімейство кіл на еліптичному конусі (див. п.5).

Приклад 2. Побудувати проекції лінії перетину тора і конічної поверхні обертання (рис. 8.18).

Вирішення. Вихідні поверхні і їхнє розташування задовольняють умовам застосовності способу концентричних і ексцентричних сфер. Проміжні точки **1, 2, 3** і **4** побудовані способом концентричних сфер, а точки **5** і **6** – способом ексцентричних сфер.

Точки **5** і **6** побудовані за алгоритмом, наведеним у **прикладі 1**. Коло на торі виділено введенням фронтально проектуючої площини **Ω(Ω₂).**

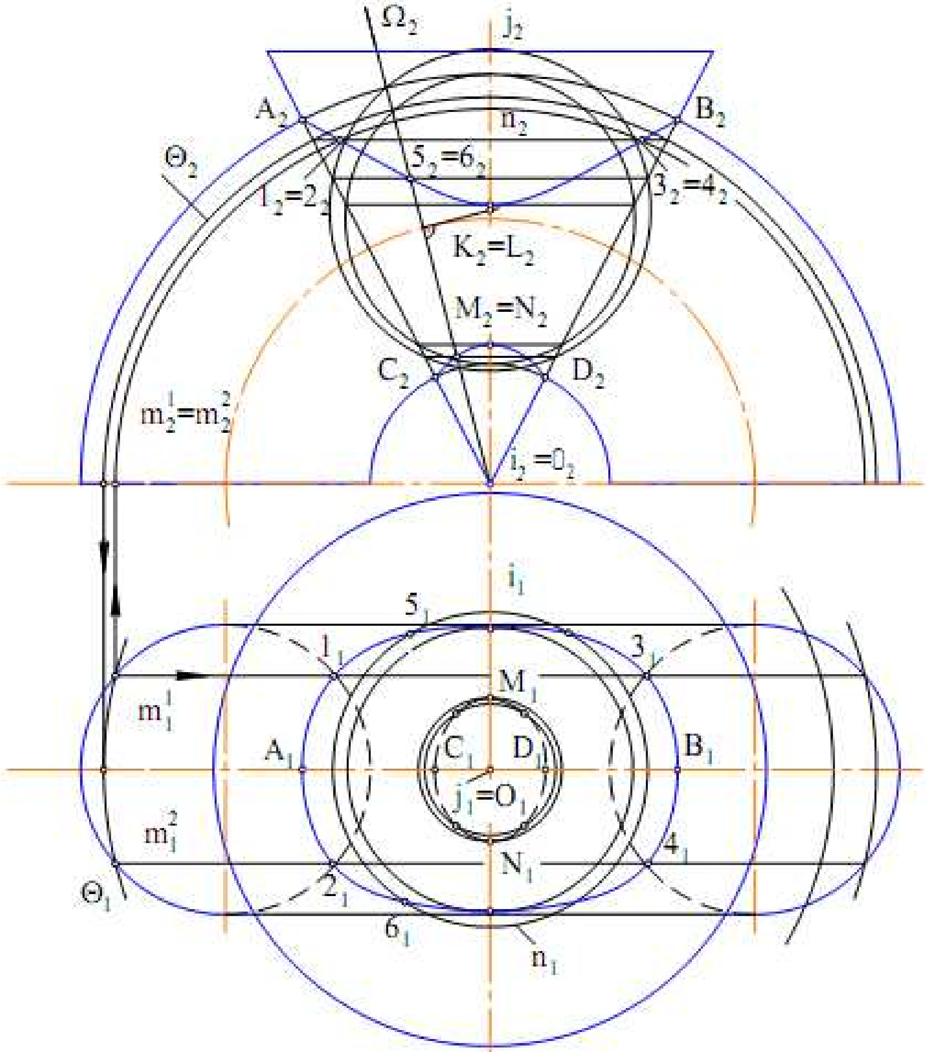


Рис. 8.18

Точки **1, 2, 3, 4** побудовані в такій послідовності:

1) побудовані проекції сфери $\boldsymbol{\Theta(\Theta_1, \Theta_2)}$ із центром у точці $\boldsymbol{O(O_1,O_2)}$;

2) визначені проекції кола $\boldsymbol{n(n_1,n_2)}$, по якому сфера перетинає конічну поверхню;

3) побудовані проекції кіл $\boldsymbol{m_1}$ і $\boldsymbol{m_2}$, по яких сфера перетинає тор; спочатку побудовані $\boldsymbol{m_1^1}$ і $\boldsymbol{m_1^2}$, а потім $\boldsymbol{m_2^1}$ і $\boldsymbol{m_2^2}$ (показано стрілками);

4) перетин проекцій кіл **m** і **n** задає проекції точок **1, 2, 3, 4**.

Точки **A, B, C, D**, а також **K, L, M, N** є опорними. Перші розташовані в перетині нарисових твірних поверхонь, а другі - на сфері мінімального радіуса (екстремальні).

4.4. Перетин поверхонь другого порядку

У загальному випадку дві поверхні другого порядку перетинаються по просторовій кривій четвертого порядку. Слід зазначити, що при деяких особливих положеннях відносно одна одної поверхні другого порядку можуть перетинатися по плоских кривих другого порядку, тобто просторова крива перетину розпадається на дві плоскі криві. Умови розпадання кривої четвертого порядку на дві криві другого порядку формулюють у вигляді наступних теорем.

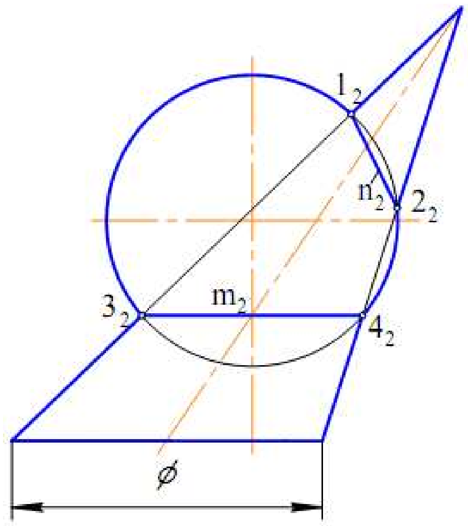


Рис. 8.19

Теорема 1. Якщо дві поверхні другого порядку перетинаються по одній плоскій кривій, то вони перетинаються ще по одній плоскій кривій. Ілюстрацією цієї теореми є рис. 8.19 на якому показані фронтальні проекції сфери і еліптичного конуса, що перетинаються по двох колах – **m(m_2)** і **n(n_2).** Коло **m** паралельне основі (площини кола) конічної поверхні, а коло **n** побудоване відповідно до теореми 1.

Теорема 2 (теорема про подвійний дотик**). Якщо дві поверхні другого порядку мають дотик у двох точках, то лінія їхнього взаємного перетину розпадається на дві плоскі криві другого порядку**.

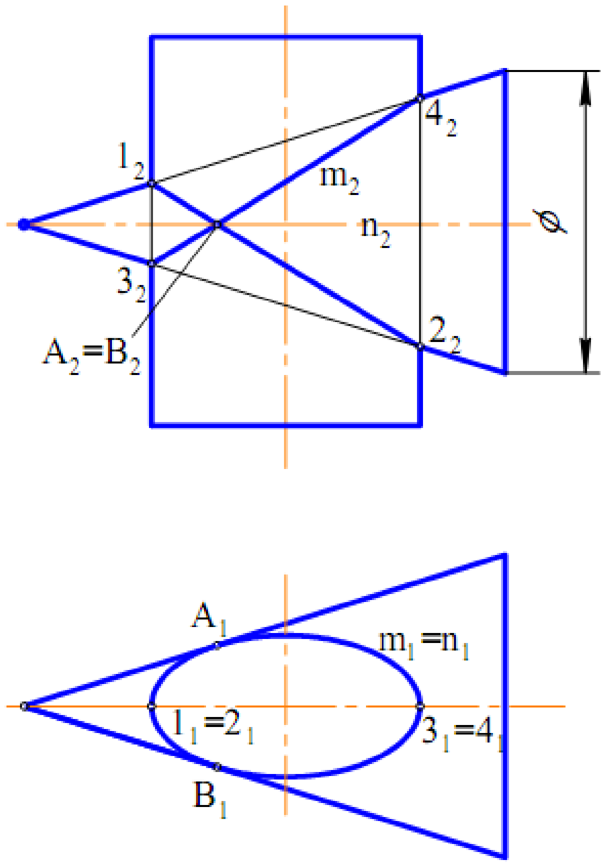


Рис. 8.20

Площини цих кривих пройдуть через пряму, що з'єднує точки дотику. На рис. 8.20 показана побудова лінії перетину конічної поверхні обертання і еліптичного циліндра (осі поверхонь перетинаються і паралельні **Π_2**). Лінії перетину − еліпси – лежать у фронтально проектуючих площинах, які проходять через пряму **AB**, що з'єднує точки дотику **A** і **B**, а також точки **1,** 2 **і 3,** 4 (точки перетину нарисів поверхонь).

Теорема 3 (теорема Монжа). **Якщо дві поверхні другого порядку описані навколо третьої поверхні другого порядку або вписані в неї, то лінія їхнього взаємного перетину розпадається на дві плоскі криві.** Площини цих кривих пройдуть через пряму, що з'єднує точки перетину лінії дотику. Ця теорема є окремим випадком теореми 2. Якщо осі пересічних поверхонь обертання паралельні до якої-небудь площини проекцій, то на цю площину криві лінії проектуються у відрізки прямих.

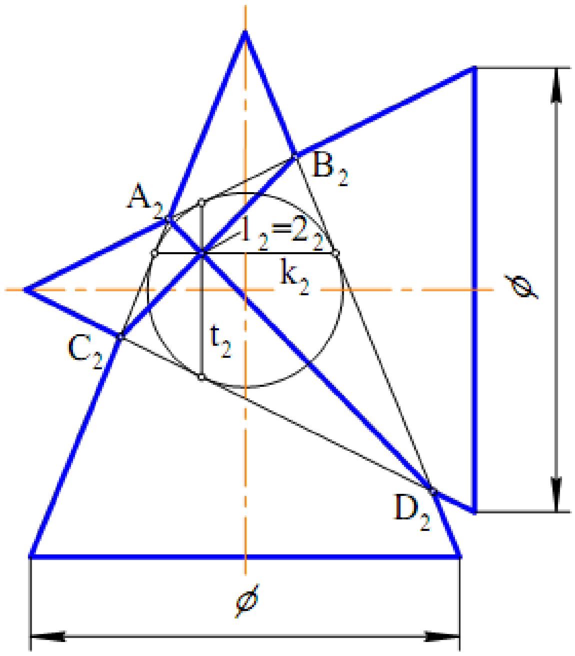


Рис. 8.21

На рис. 8.21 наведено приклад побудови лінії перетину двох конічних поверхонь обертання, осі яких перетинаються і паралельні **П**$_2$. Вихідні поверхні описані навколо сфери і мають із ними дотик по колах **t(t**$_2$) і **k(k**$_2$). Ці кола перетинаються в точках **1** і **2**. Площини ліній перетину проходять через пряму **12** і точки перетину нарисів поверхонь **A, D, B** і **C**.

ЛЕКЦІЯ № 9. РОЗГОРТКИ ПОВЕРХОНЬ. АКСОНОМЕТРИЧНІ ПРОЕКЦІЇ

1. РОЗГОРТКИ ПОВЕРХОНЬ

Визначення. Якщо поверхню, що представляється у вигляді тонкої, гнучкої і нерозтяжної плівки, можна шляхом згинання сумістити з площиною без розривів і складок, то поверхня, що володіє цією властивістю, називається розгортною, а фігура, отримана в результаті суміщення поверхні з площиною, називається **розгорткою**.

У математиці доведено, що до розгортних відносяться тільки три групи лінійчатих поверхонь: конічні, циліндричні й торсові (поверхні дотичні до просторової кривої). У цих поверхонь уздовж кожної прямолінійної твірної існує єдина дотична площина, в інших лінійчатих поверхонь уздовж твірної прямої існує нескінченна множина таких площин. Суміщення поверхні з площиною приводить до відповідності, установлюваній між множиною точок поверхні і множиною точок її розгорнення. Ця відповідність має такі властивості:

1) **точці поверхні відповідає єдина точка розгорнення і навпаки**;

2) **довжини відповідних ліній поверхні і її розгортки рівні**;

3) **кути, утворені лініями на поверхні, дорівнюють кутам, утвореним відповідними лініями на розгортці**;

4) **площі відповідних фігур на поверхні і на розгортці рівні**.

З наведених властивостей випливають такі наслідки:

1) **пряма лінія поверхні перетвориться в пряму лінію на розгортці**;

2**) паралельні лінії поверхні перетворяться в паралельні прямі її розгортки**.

Для лінійчатих поверхонь, що розгортаються, будують графічно наближені розгортки, оскільки в процесі побудови розгорток ці поверхні заміняються (апроксимуються) уписаними або описаними многогранними поверхнями. Точні розгортки апроксимуючих многогранних поверхонь приймають за наближені розгортки поверхонь, що розгортаються. Для поверхонь, які є нерозгортними, будують умовні розгортки за наступною схемою:

НП $\Rightarrow$ РП (ГП ~ ТР, де **НП** - поверхня нерозгортна, **РП** – поверхня розгортна, **ГП** - гранна поверхня, **ТР** - точне розгорнення,$\Rightarrow$ - етап апроксимації попередньої поверхні наступною. Оскільки в результаті послідовних апроксимацій вихідна поверхня заміняється гранною, то розглянемо спочатку побудови точних розгорток гранних поверхонь.

1.1 Розгортки гранних поверхонь

Визначення. Розгорткою гранної поверхні називається множина з'єднаних у площині многокутників, конгруентних (рівних) відповідно до її граней. Під з'єднанням розуміється послідовне розміщення многокутників розгортки, що відповідає послідовному розташуванню граней поверхні.

Задача. Дано піраміду **SABC** (рис. 9.1). Побудувати розгортку її поверхні.

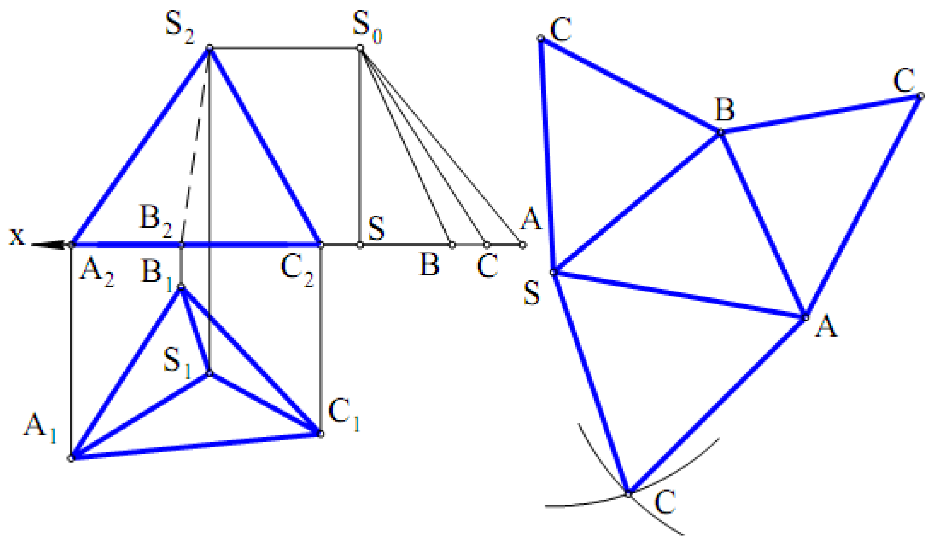


Рис. 9.1

Основа **ABC** піраміди належить площині проекцій $\mathbf{П_1}$, тому $\Delta \mathbf{A_1B_1C_1}$ – його НВ. Для визначення **НВ** бічних ребер піраміди скористаємося методом прямокутного трикутника (див. рис. 5.1). $\mathbf{SS_0 \perp x}$ **–** загальна різниця висот кінців ребер даної піраміди. Відкладаючи від точки **S** по осі **X** відрізки $\mathbf{SB = S_1B_1, SC = S_1C_1, SA = S_1A_1}$, одержуємо $\mathbf{S_0B}$, $\mathbf{S_0C}$, $\mathbf{S_0A}$ – **НВ** ребер піраміди.
Потім осторонь, використовуючи відомі правила побудови трикутника по його сторонах, виконуємо власне побудову розгортки піраміди.

Задача. Дано триграну призму **ABCDFE** (рис. 9.2). Побудувати розгортку її бічної поверхні. Основи **ABC** і **DFE** даної призми паралельні площині проекцій $\mathbf{П_1}$ і, отже, проектуються на цю площину у **НВ**. Кожну з бічних граней призми представляємо у вигляді двох трикутників, розділивши грань діагоналлю. За методом прямокутного трикутника визначаємо **НВ** трьох діагоналей **BD, BE** і **CD** і одного ребра (ребра за умовою задачі рівні).

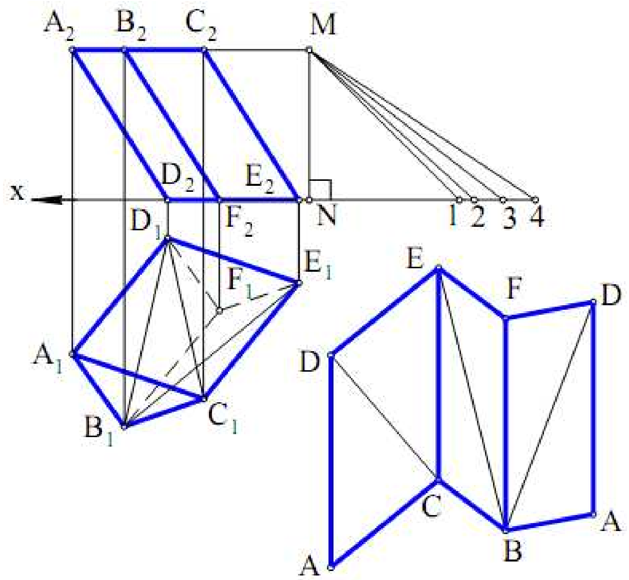


Рис. 9.2

У підсумку на діаграмі натуральних величин відрізків одержуємо:

MN – загальна різниця висот ребер; $\mathbf{N_1 = A_1D_1 = B_1F_1 = C_1E_1}$; $\mathbf{N2 = D_1C_1}$, $\mathbf{N_3 = B_1D_1}$, $\mathbf{N_4 = B_1E_1}$; **M1** – **НВ** ребра, $\mathbf{M_2}$ – **НВ** діагоналі **DC**, $\mathbf{M_3}$ – **НВ** діагоналі **BD** і $\mathbf{M_4}$ – **НВ** діагоналі **BE**. Маючи **НВ** ребер призми, трьох її діагоналей і сторін трикутників основ, будуємо розгортку бічної поверхні як сукупності трикутників, що вибудовуються по їхніх сторонах.

Метод, яким були побудовані розгортки в розглянутих двох задачах, називається **методом трикутників** (**метод триангуляції**). Метод заснований на можливості побудови єдиного (за формою) трикутника по його заданих сторонах. Замітимо, що чотири, п'ять, відрізків визначають нескінченну множину чотирьох, п'яти, трикутників. Метод трикутників найбільш простий і універсальний при побудові точних розгорток гранних поверхонь, а також наближених і умовних розгорток лінійчатих поверхонь.

Розглянемо спеціальні методи побудови розгорток гранних поверхонь.

Задача. Дано тригранну призму $\mathbf{ABCA^1У^1C^1}$ (рис. 9.3). Побудувати розгортку призми.

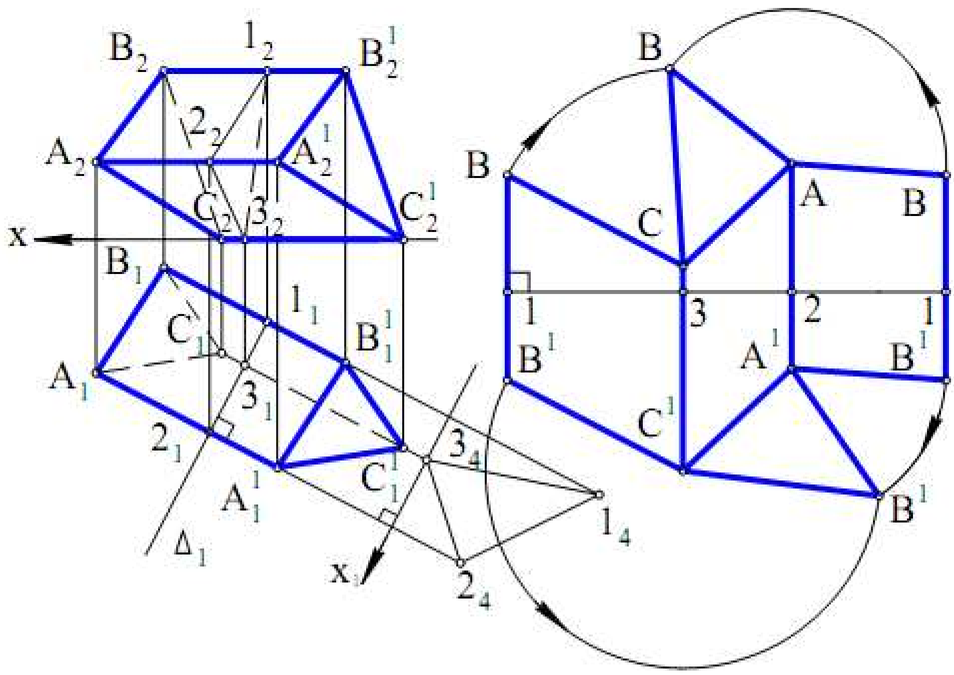


Рис. 9.3

Для побудови розгортки застосуємо метод **нормального перетину**. Метод застосуємо для призматичних поверхонь, в яких бічні ребра являють собою лінії рівня. Послідовність побудов у методі нормального перетину наступна:

1) призма перетинається площиною **Δ** перпендикулярно до її ребер;

2) визначаються **НВ** сторін многокутника, по яких площина **Δ** перетинає поверхню призми;

3) многокутник як ламана лінія розгортається у відрізок прямої, всередині якого відзначаються точки, що відповідають вершинам многокутника;

4) через ці точки проводяться прямі, перпендикулярні до відрізка - розгортки многокутника;

5) на перпендикулярних прямих від зазначених точок відкладаються відрізки, що представляють **НВ** відповідних відрізків ребер піраміди;
6) кінці відрізків ребер послідовно з'єднуються відрізками прямих ліній;
7) до побудованої розгортки бічної поверхні добудовуються **НВ** многокутників - основи призми.

Застосуємо викладену послідовність до нашої задачі. Оскільки ребра призми **AA^1, BB^1, CC^1** за умовою задачі є горизонталями, те **$A^1A_1^1$,$B^1B_1^1$, $3^1C_1^1$** є **НВ** цих ребер. Перетнемо бічну поверхню призми площиною **Δ**, перпендикулярною до її ребер. Оскільки ребра є горизонталями, то **$\Delta \perp \Pi_1$** і **Δ_1** – горизонтальний слід площини Δ. **$1_12_13_1$** і **$1_22_23_2$** – проекції нормального перетину призми. Проекція Δ **$1_42_43_4$** являє собою **НВ** нормального перетину, побудовану методом заміни площин проекцій, де **$x_1 \parallel \Delta_1$**. Осторонь від КК, на горизонтальній прямій, послідовно розташовуємо відрізок **$13 = 1_43_4$**, **$32 = 3_42_4$, $21 = 2_41_4$** і проводимо через їхні кінці вертикальні прямі. На цих прямих відкладаємо відрізки: **$1B = 1_1B_1$, $1B^1 = 1_1B_1^1$; $3C = 3_1C_1$, $3C^1 = 3_1C_1^1$; $2A = 2_1A_1$, $2A^1 = 2_1A_1^1$**.

Многокутник **$BCABB^1A^1C^1У^1$** являє собою розгортку бічної поверхні заданої призми. Добудувавши до неї Δ**ABC** і Δ**$A^1C^1У^1$**, одержуємо повну розгортку призми.

Задача. Дано призму **$ABCA^1C^1У^1$** (рис. 9.4). Побудувати її розгортку.
Для цього можна використати відомий метод розкочування. Його застосування можливо для таких призматичних поверхонь, в яких бічні ребра й площини основ є прямими і площинами рівня.

Суть методу полягає в послідовному обертанні граней призми навколо її бічних ребер до положення суміщення із площиною, що проходить через одне із ребер і паралельні площини проекцій, тобто кожна грань залишає свій «відбиток» у цій площині.

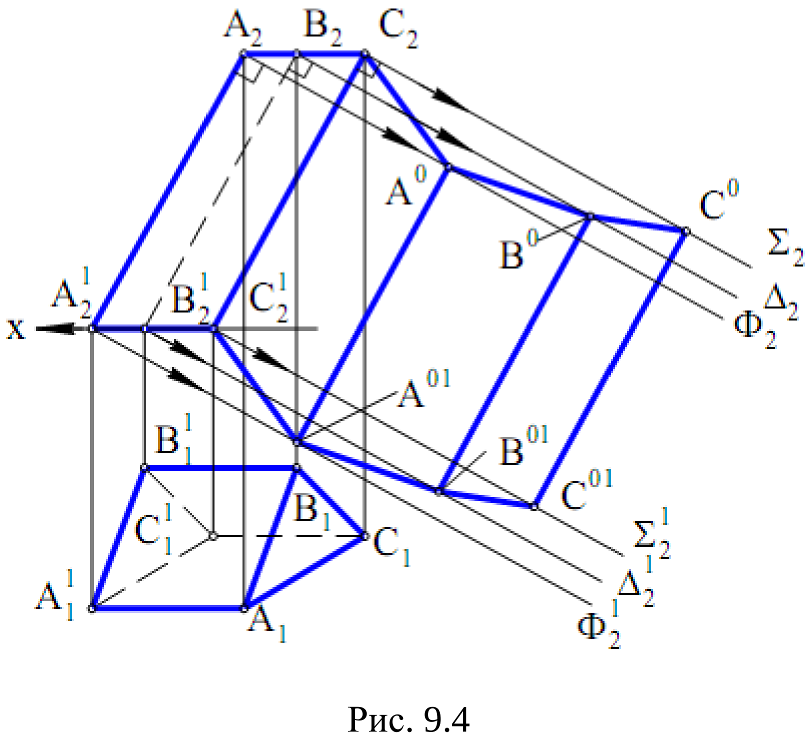


Рис. 9.4

Множина послідовно отриманих і розташованих «відбитків» у площині являє собою розгортку бічної поверхні призми.

Розглянемо вирішення даної задачі. Бічні ребра призми є фронталями, а площини основ - горизонтальними площинами рівня.

Умови задачі відповідають **методу розкочування**. Нехай перше обертання – обертання грані $\mathbf{ACC^1A^1}$, відбувається навколо осі $\mathbf{CC^1}$. Повернемо цю грань до суміщення із площиною розгортки, що проходить через ребро $\mathbf{CC^1}$ і паралельна площині проекцій $\mathbf{П_2}$. У цьому випадку вершини **А** и $\mathbf{A^1}$ будуть обертатися в проектуючих площинах, Ф $\perp$ $\mathbf{П}_2$ **і** $\mathbf{Ф_1}$ $\perp$ $\mathbf{П}_2$ відповідно, які перпендикулярні до ребра $\mathbf{AA}_1$. Суміщені положення $\mathbf{A^0}$ і $\mathbf{A}^{01}$ вершин **А** и $\mathbf{A^1}$ будуть належати фронтальним слідам $\mathbf{Ф_2}$ і $\mathbf{Ф_2^1}$ площин **Ф** и $\mathbf{Ф^1}$ відповідно і відстояти від точок $\mathbf{З_2}$ і $З_2^{\mathbf{1}}$ на відстані $\mathbf{З_2A^0} = \mathbf{C_2{}^1A^{01}} = \mathbf{A_1C_1} = \mathbf{A_1{}^1C_1{}^1}$. Наступним обертанням навколо осі $\mathbf{A^0A^{01}}$ домагаємося суміщення грані $\mathbf{ABB^1A^1}$ із площиною розгортки. При цьому суміщенні положення $\mathbf{B^0}$ і $\mathbf{B^{01}}$ вершин **В** и $\mathbf{B^1}$ відповідно будуть належати фронтальним слідам Δ_2 і Δ_2^1 площин $\Delta \perp$ **П2** і
$\Delta \perp \mathbf{П_2}$ і відстояти від точок $\mathbf{A^0}$ і $\mathbf{A^{01}}$ на відстані $\mathbf{B^0A^0} = \mathbf{B^{01}A^{01}} = \mathbf{B_1A_1} = \mathbf{B_1{}^1A_1{}^1}$.

Останнє, третє обертання, буде відбуватися навколо осі $\mathbf{B^0B^{01}}$ і дозволить одержати суміщення грані $\mathbf{BCC^1B^1}$ із площиною розгортки, при цьому суміщені положення $\mathbf{C^0}$ і $\mathbf{C^{01}}$ вершин **С** и $\mathbf{C^1}$ будуть належати фронтальним слідам $\mathbf{\Sigma_2}$ і $\mathbf{\Sigma_2{}^1}$ проектуючих площин $\mathbf{\Sigma} \perp \mathbf{П_2}$ і $\mathbf{\Sigma^1} \perp \mathbf{П_2}$ і відстояти від точок $\mathbf{B^0}$
і $\mathbf{B^{01}}$ на відстані $\mathbf{C^0B^0} = \mathbf{C^{01}B^{01}} = \mathbf{C_1B_1} = \mathbf{C_1{}^1B_1{}^1}$. Отриманий у підсумку побудов многокутник $\mathbf{C_2A^0B^0C^0C^{01}B^{01}A^{01}C_2{}^1}$ буде являти собою розгортку бічної поверхні заданої призми.

1.2. Наближені розгортки поверхонь

Побудову наближених розгорток виконують в наступній послідовності:

1) задану лінійчату поверхню, що розгортається, заміняють (апроксимують) гранною поверхнею;

2) будують точну розгортку гранної поверхні;

3) точну розгортку приймають за наближену розгортку заданої поверхні.

Для деяких лінійчатих поверхонь, що розгортаються, немає необхідності в їхній заміні гранними поверхнями. Так, відсік циліндричної поверхні обертання радіуса **r** і висотою **h** має розгорткою

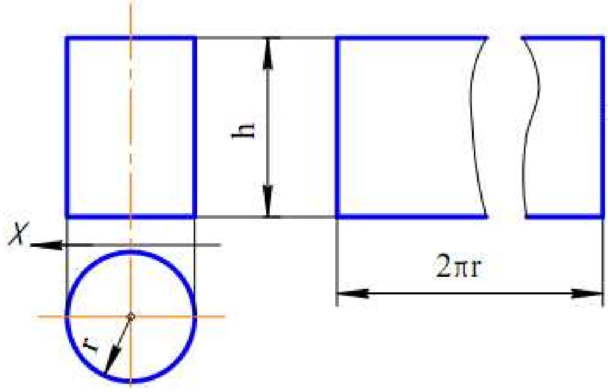


Рис. 9.5

прямокутник зі сторонами **h** і **2πr** (рис. 9.5).

Розгорткою конічної поверхні обертання висотою **h** і основою радіуса **r** є сектор радіуса $\mathbf{R} = \sqrt{\mathbf{h}^2 + \mathbf{r}^2}$ з кутом $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{2\,\pi r/R}$ (рис. 9.6).

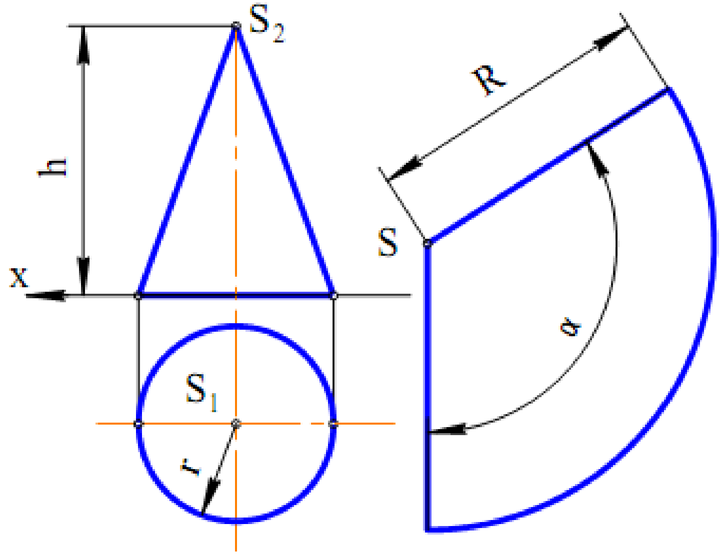


Рис.9.6

Розглянемо приклад побудови наближених розгорток.

Задача. Дано відсік конічної поверхні (рис. 9.7). Побудувати його наближену розгортку.

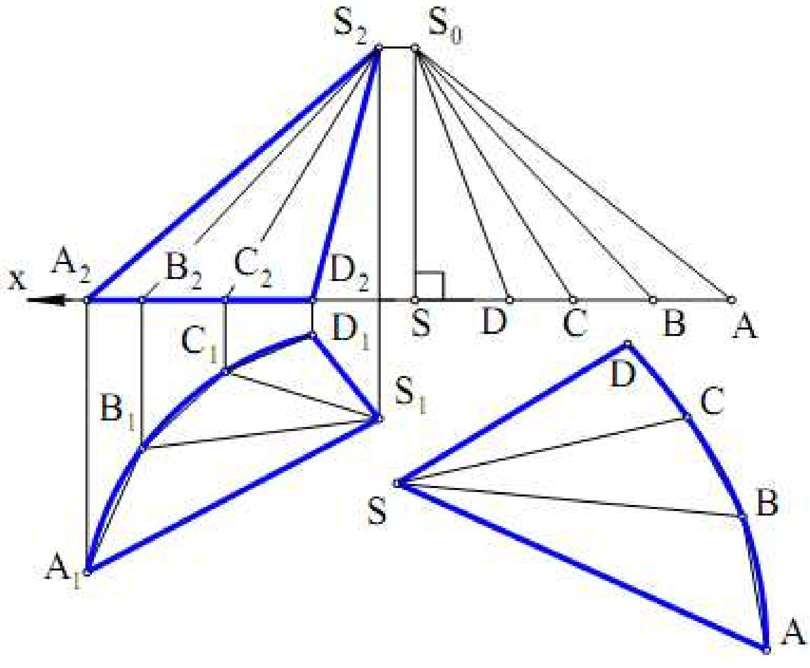


Рис. 9.7

Плоску криву лінію – напрямну конічної поверхні спочатку заміняють уписаною ламаною лінією $\mathbf{ABCD}(\mathbf{A_1B_1C_1D_1},\ \mathbf{A_2B_2C_2D_2})$, що за умовою задачі належить площині проекцій $\mathbf{\Pi_1}$ і тому $\mathbf{A_1B_1C_1D_1}$ – її **НВ**. Потім з'єднують вершини ламаної з вершиною **S** конічної поверхні й одержують уписану пірамідальну поверхню **SABCD**, яка заміняє дану конічну поверхню. Використовуючи метод прямокутного трикутника, будують діаграму **НВ** ребер уписаної пірамідальної поверхні. При цьому $\mathbf{SS_0}$ – загальна різниця висот кінців ребер піраміди; $\mathbf{SD = S_1D_1, SC = S_1C_1, SB = S_1B_1, SA = S_1A_1; S_0D, S_0C, S_0B, S_0A}$ – являють собою **НВ** ребер піраміди. **SDCBA** – розгортка бічної поверхні заданого конічного відсіку.

Задача. Дано відсік поверхні еліптичного циліндра (рис. 9.8). Побудувати розгортку його бічної поверхні.

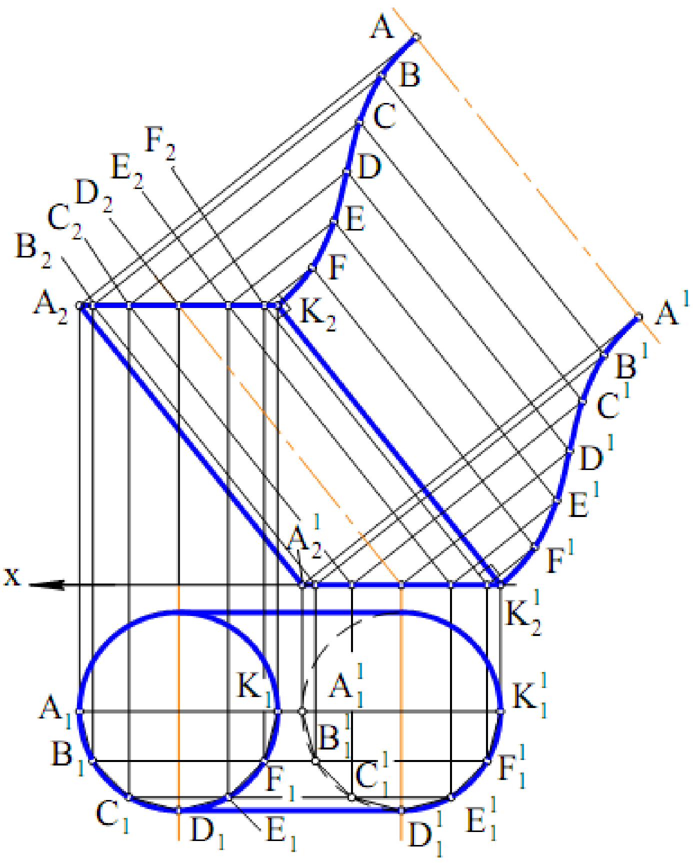


Рис. 9.8

Впишемо в дану поверхню деяку призматичну поверхню, розділивши напрямну лінію циліндра - коло, на рівне число частин, наприклад на 12 (на рис. 9.8 внаслідок симетричності заданої поверхні, для простоти побудови виконане ділення половини поверхні на 6 частин).
Бічні ребра вписаної призми є фронталями, а її основи – многокутники належать горизонтальним площинам рівня. Із цієї причини бічні ребра проектуються на $\mathbf{\Pi_2}$ у **НВ**, а многокутники основ – у **НВ** на $\mathbf{\Pi_1}$.
Відзначені умови задачі відповідають методу розкочування для побудови розгортки вписаної призми. Оскільки призма має площину симетрії, що проходить через лінію центрів твірний еліптичний циліндр кіл і яка є фронтальною площиною рівня, то для скорочення побудов виконаємо побудову розгортки тільки половини призми. Обертання призми по методу розкочування варто починати з ребра $\mathbf{KK^1(K_1K_1^1,\ K_2K_2^1)}$. Тому площиною розгортки призми буде фронтальна площина рівня, що проходить через ребро $\mathbf{KK^1}$. Послідовним обертанням навколо ребер призми домагаємося сполучення всіх її граней із площиною розгортки. При цьому $\mathbf{K_2F = K_2^1F^1 = K_1^1F_1^1 = K_1F_1;\ FE = F^1E^1 = F_1^1E_1^1 = F_1E_1}$ і т.д. Отриманий многокутник $\mathbf{ABCD \ldots D^1C^1B^1A^1}$являє собою точну розгортку половини бічної поверхні вписаної призми, що, у свою чергу, визначає наближену розгортку відповідної половини поверхні еліптичного циліндра.

Задача. Дано відсік торсової поверхні (рис. 9.9). Побудувати його розгортку.

Торсова поверхня – це лінійчата поверхня, що розгортається, утворена дотичними прямими до просторової кривої, яка має назву ребра повернення цієї поверхні. У нашій задачі відсік заданої поверхні обмежений ребром повернення **$a(a_1, a_2)$,** плоскої кривої **$m(m_1, m_2)$** і відрізком **AA^1** її твірної.

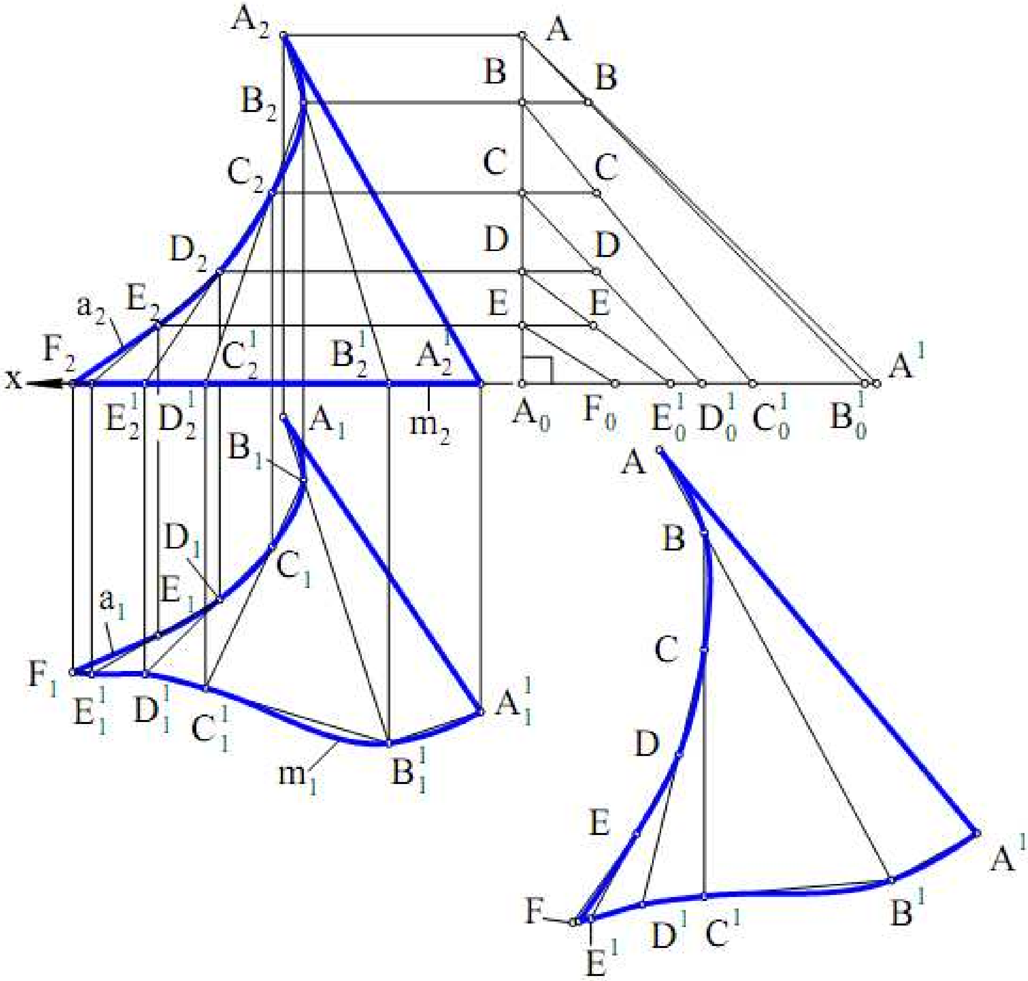


Рис.9.9

Замінимо криву **m** вписаною ламаною лінією **$A^1B^1C^1D^1E^1F$** із проекціями **$A_1^1B_1^1C_1^1D_1^1E_1^1F_1$ і $A_2^1B_2^1C_2^1D_2^1E_2^1F_2$**. Потім виконаємо наступні дії:

1) з'єднаємо точки **A** и **B^1** для одержання відрізка **$AB^1(A_1B_1^1, A_2B_2^1)$;**

2) відзначивши точку перетину **$AB^1 \cap a = B(B_1, B_2)$,** з'єднаємо точки **B** и **C^1** для одержання відрізка **$BC^1(B_1C_1^1, B_2C_2^1)$;**

3) відзначивши точку перетину **$BP^1 \cap a = C(C_1, C_2)$,** з'єднаємо точки **C** и **D^1** для одержання відрізка **$CD^1(C_1D_1^1, C_2D_2^1)$;**

4) відзначивши точку перетину **$CD^1 \cap a = D(D_1, D_2)$,** з'єднаємо точки **D** і **E^1** для одержання відрізка **$DE^1(D_1E_1^1, D_2E_2^1)$;**

5) відзначивши точку перетину **$DE^1 \cap a = E(E_1, E_2)$,** з'єднаємо точки **E** и **F^1** для одержання відрізка **$EF(E_1F_1, E_2F_2)$.**

У підсумку виконання побудов одержимо вписаний у ребро повернення **a** просторовий многокутник **$ABCDEF(A_1B_1C_1D_1E_1F_1, A_2B_2C_2D_2E_2F_2)$** і вписану в торсову поверхню гранну поверхню з ребрами **AA^1, AB^1, BP^1,CD^1, DE^1, EF**.

Очевидно, гранями вписаної в торсову поверхню гранної поверхні є трикутники, в яких дві вершини є вершинами плоскої ламаної лінії, вписаної в лінію **m**, а третя вершина – це вершина просторової ламаної, вписаної в ребро повернення **a**. Сторона одного з двох сусідніх трикутників належить стороні іншого і служить ребром гранної поверхні. Подальші побудови полягають у визначенні **НВ** двох із трьох сторін кожного трикутника методом прямокутного трикутника, оскільки третя сторона спроектована на Π_1 у **НВ**. Для цього будується діаграма **НВ** сторін трикутників – граней. При цьому на прямій AA_0 від точки A_0 відкладаються різниці висот кінців відрізків – сторін трикутників, а по осі **Х** від точки A_0 – довжини горизонтальних проекцій цих сторін. Причому $A_0F_0 = E_1F_1$, $A_0E_0^1 = D_1E_1^1$, $A_0D_0^1 = C_1D_1^1$, $A_0C_0^1 = B_1C_1^1$, $A_0B_0^1 = A_1B_1^1$, $A_0A^1 = A_1A_1^1$.

Потім виконуються послідовні побудови трикутників – граней по трьох їхніх сторонах, що приводить до плоскої області, обмеженої лінією $ABCD\ldots D^1C^1B^1A^1$... Ця плоска область буде наближеною розгорткою заданої торсової поверхні.

1.3. Умовні розгорнення поверхонь, що не розгортаються

Розглянемо кілька прикладів, виходячи із зазначеної раніше схеми побудови умовної розгортки поверхні.

Задача. Дано поверхню обертання (рис. 9.10). Побудувати її розгортку.

Очевидно, дана поверхня не є тією, що розгортається і для неї можна побудувати лише умовну розгортку. Розділимо поверхню обертання осьовими площинами Δ^i, де **i = 1, 2, 3, …,** на рівне число частин (відсіків) і виберемо одну з них (наприклад, шосту частину), обмежену проектуючими площинами Δ^1 і Δ^2, що мають горизонтальні сліди Δ_1^1 і Δ_2^1. Приймемо нарисову лінію $t(t_1, t_2)$ за напрямну лінію циліндричної поверхні з відрізками її фронтально - проектуючих твірних між площинами Δ^1 і Δ^2.

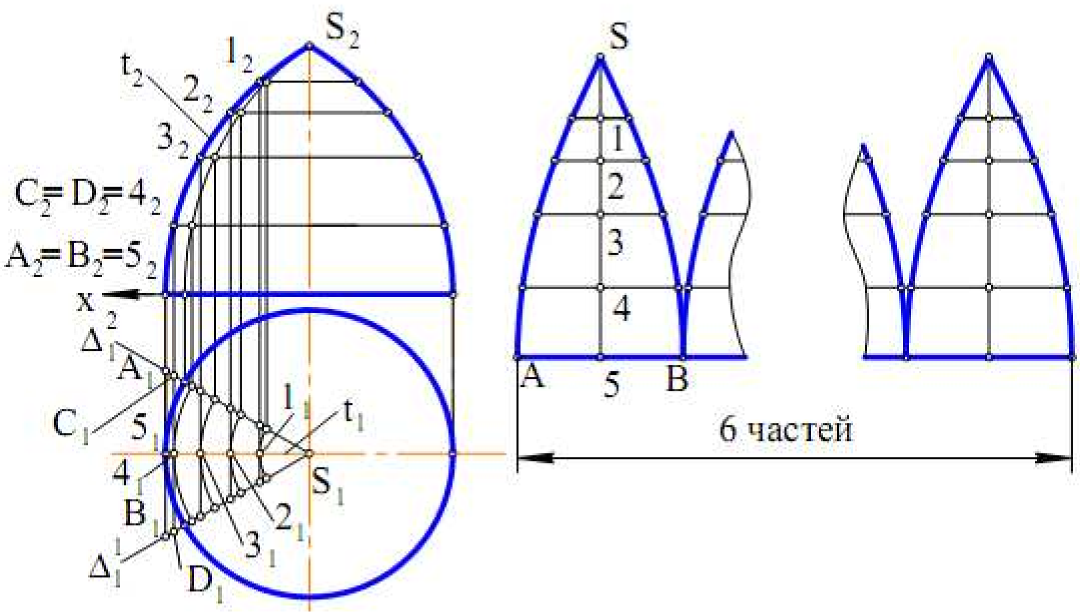


Рис.9.10

Відсіком цієї поверхні виконана апроксимація обраної частини вихідної поверхні. Відповідно до схеми побудови умовної розгортки виконаємо другу апроксимацію, замінивши відсік циліндричної поверхні відсіком призматичної поверхні. Для цього виберемо на напрямній **t** ряд точок, наприклад **S, 1**, **2, 3, 4, 5**, і проведемо через них фронтально проектуючі твірні, наприклад, **AB э 5**. Відрізки цих прямолінійних твірних між осьовими площинами Δ^1 і Δ^2 заміняють відповідні відрізки паралелей (кіл) вихідної поверхні і є ребрами призматичної поверхні, а ламана лінія **S12345**, вписана в лінію **t**, є напрямною лінією цієї поверхні. Точна розгортка призматичної поверхні, вписаної в циліндричну поверхню, служитиме наближеною розгорткою описаної циліндричної поверхні й умовною розгорткою відсіку вихідної поверхні обертання. Для побудови розгортки відсіку вписаної призматичної поверхні проведемо осторонь від вихідного КК горизонтальну лінію й виберемо на ній точку **5**. По обидві сторони від точки **5** відзначимо горизонтально й симетрично точки **A** і **B** такі, що $\mathbf{AB = A_1B_1}$. Вертикально від точки **A** відкладемо відрізок **54** = $\mathbf{5_2 4_2}$. Потім від точки **4** горизонтально і симетрично відмітимо точки **C** і **D** такі, що $\mathbf{CD = C_1D_1}$ і т.д. У підсумку побудов одержуємо два ряди точок, симетричних щодо лінії **5S**. З'єднавши точки кожного ряду лекальними кривими, одержимо умовну розгортку виділеного відсіку вихідної поверхні. Приєднавши до неї такі ж (рівні) розгортки інших відсіків, одержимо повну умовну розгортку поверхні.

Задача. Дано чверть поверхні тора (рис. 9.11). Побудувати її розгортку.

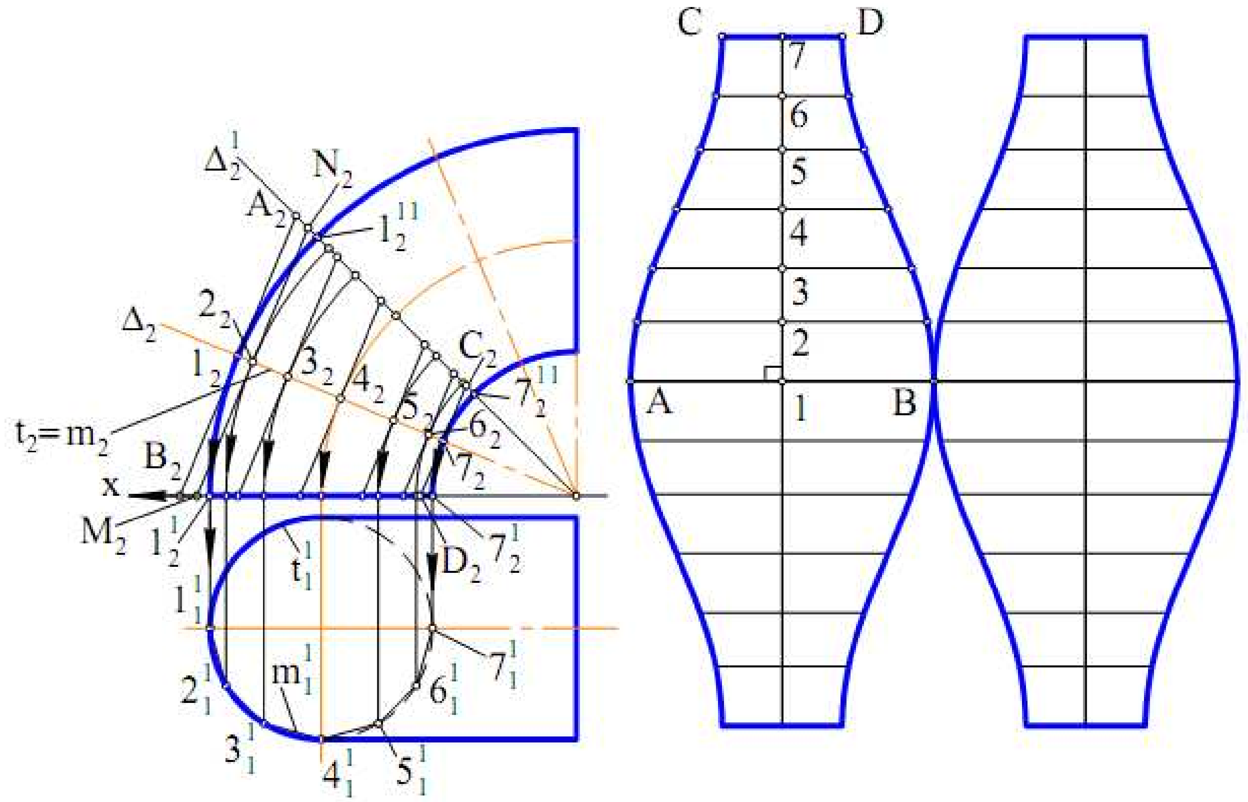


Рис.9.11

Для вирішення задачі розсічемо чверть поверхні тора фронтально проектуючими осьовими площинами $\mathbf{\Delta^i}$, **i = 1, 2, 3…**на рівні відсіки й виділимо один з них, наприклад, розташований між січними площинами $\mathbf{\Pi_1}$ і $\mathbf{\Delta^1}$.

Проведемо площину симетрії Δ цього відсіку. Вона розсікає відсік тора по колу **t** ,при цьому

$t_2 = 1_27_2$, де t_1^1 – **НВ** цього кола. Замінимо виділений відсік поверхні чверті тора відсіком описаної циліндричної поверхні з напрямною **t** і твірними – фронтальними лініями рівня, розташованими між площинами Π_1 і $\Delta^{1.}$ Відрізки цих твірних у межах між Π_1 і Δ^1 заміняють відрізки відповідних паралелей (кіл) поверхні чверті тора. Наприклад відрізок **AB**(A_2B_2) прямої заміняє дугу паралелі $1^11^{11}(1_2{}^11_2{}^{11})$, відрізок **CD**$(C_2D_2)$ заміняє дугу паралелі $7^17^{11}(7_2{}^17_2{}^{11})$ і т.д. Після цього замінимо відсік описаної циліндричної поверхні відсіком призматичної поверхні, вписаної в циліндричну.

Лінія **m** (m_2) – ламана лінія, вписана в коло **t** і проходить через вершини **1, 2, 3, 4, 5, 6, 7**. Ця лінія служить напрямною вписаної призматичної поверхні й має свою **НВ** ламану лінію m_1^1, що проходить через вершини $1_1^1, 2_1^1,\ldots, 7_1^1$... Твірні **AB, …, CD** циліндричної поверхні є ребрами призматичної поверхні. Точна розгортка відсіку вписаної призматичної поверхні є наближеною розгорткою відсіку описаної циліндричної поверхні й умовною розгорткою відсіку поверхні тора. Для побудови умовної розгортки відзначимо осторонь від КК на горизонтальній прямій точку **1** і симетричні точки **A** і **B** такі, що $AB = A_2B_2$. На вертикальній прямій на точці **1** відкладемо відрізок $12 = 1_1{}^12_1{}^1$ і проведемо через точку **2** горизонтальну пряму, на якій побудуємо симетричні точки **M** і **N** так, що $MN = M_2N_2$ і т.д. У підсумку побудов одержимо два вертикально симетричних точкових ряди **A, N, …C** і **B, M,…, D**. Відбивши їх симетрично щодо горизонтальної прямої **AB** і провівши через кожну з них лекальну криву, одержимо умовну розгортку виділеного відсіку поверхні тора. Додавши до неї такі ж (рівні) розгортки інших відсіків, одержимо повну умовну розгортку чверті поверхні тора або всієї його поверхні.

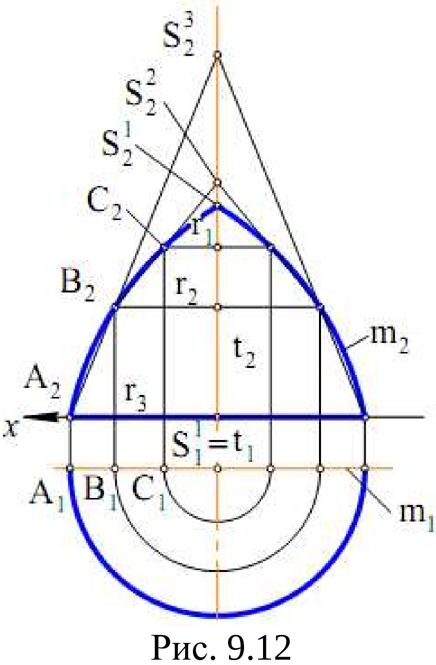


Рис. 9.12

Задача. Дано поверхню обертання з віссю обертання **t** і твірною кривою **m** (рис. 9.12). Побудувати її розгортку.

Очевидно, дана поверхня може мати тільки умовну розгортку. Для її побудови можна застосувати метод конусів. Вирішення задачі в цьому випадку може бути наступним:

1) заміняємо твірну **m** ламаною лінією $ABCS^1(A_1\,B_1\,C_1\,S_1{}^1, A_2\,B_2\,C_2\,S_2{}^1)$;

2) розсікаємо задану поверхню обертання площинами, перпендикулярними осі t і які проходять через вершини ламаної;

3) кола, що утворяться в перетинах, приймаємо як основи конічних поверхонь з вершинами і радіусами основ: S^1,r_1; S^2,r_1; S^2,r_2; S^3,r_2; S^3,r_3;

4) для кожної конічної поверхні будуємо її точну розгортку на основі раніше наведеної формули $\alpha_i = 2\ \pi r/\ R$, де **r** приймає значення r_1, r_2, r_3; **R** приймає значення $S^1C, S^2C, S^2B, S^3B, S^3A$; $\alpha_1 = \cdot 3S^14$, $\alpha_2 = \cdot 2S^25$, $\alpha_3 = \cdot 1\ S^36$.

У підсумку побудов одержуємо умовну розгортку вихідної поверхні обертання, складену з трьох точних розгорток таких конічних поверхонь: повної $\mathbf{S^1}$, $\mathbf{r_1}$ і двох урізаних поверхонь $\mathbf{S^2}$,$\mathbf{r_1}$,$\mathbf{r_2}$; $\mathbf{S^3}$,$\mathbf{r_2}$,$\mathbf{r_3}$, (рис. 9.13).

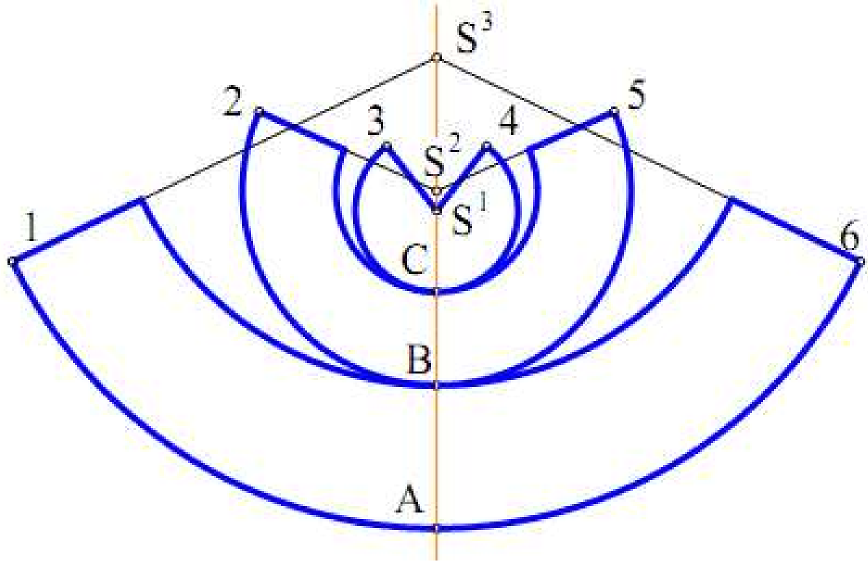


Рис.9.13

2. АКСОНОМЕТРИЧНІ ПРОЕКЦІЇ

У перекладі з грецької мови слово «аксонометрія» означає вимір по осях. Особливістю аксонометричного проектування є те, що разом з фігурою на площину проектується і просторова система координат, пов'язана із цією фігурою. При цьому жодна з осей системи координат не проектується в точку. Використання аксонометричного проектування дозволяє підвищити наочність зображення фігури.

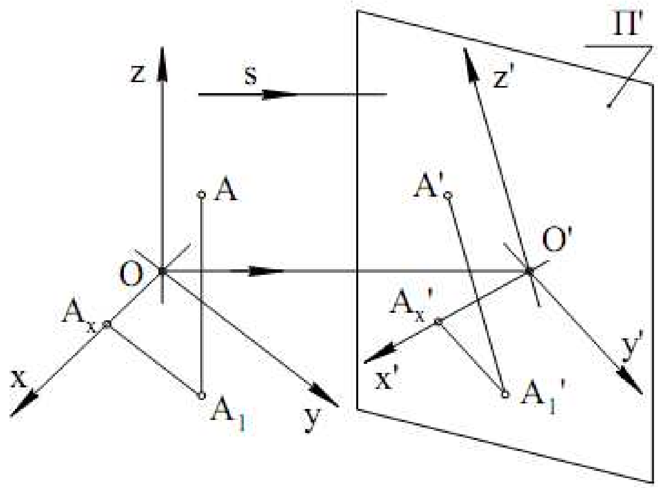


Рис. 9.14

Розглянемо проекційну схему одержання аксонометричної проекції найпростішої фігури – точки (рис. 9.14).Точка **A** і просторова система координат **Oxyz** зв'язані координатної ламаної $\mathbf{OAx_1A}$, ланками якої є координатні відрізки $|\mathbf{OA_x}| = |\mathbf{xA}|$, $|\mathbf{Ax_1}| = |\mathbf{yA}|$, $|\mathbf{A_1A}| = |\mathbf{zA}|$. Площина **П'** – аксонометрична площина, **s** – напрямок проектування. Всі проектуючи прямі паралельні **s.** Якщо пряма **s** не перпендикулярна до **П'**, то маємо **косокутне проектування** і одержимо косокутну аксонометричну проекцію.

Якщо пряма **s** перпендикулярна **П'**, то маємо **ортогональне проектування** й одержимо **ортогональну (прямокутну)** аксонометричну проекцію. Надалі розглядається ортогональне проектування і ортогональні аксонометричні проекції.

На площині **П'** після проектування одержимо: **A'** – аксонометрична проекція точки **A**; **O'x'y'z'** – аксонометрична система координат (проекція системи **Oxyz**); **x', y', z'** – аксонометричні осі (проекції осей **x, y, z**); $\mathbf{A_1'}$ – аксонометрична проекція горизонтальної проекції точки А, або вторинна проекція точки **A;** $\mathbf{O'A_x'\ A_1'\ A'}$ – аксонометрична координатна ламана (проекція ламаної $\mathbf{OAx_1A}$). Ланки аксонометричної координатної ламаної паралельні відповідним аксонометричним осям, тому що паралельні прямі проектуються в паралельні прямі.

Нехай кут між віссю **x** і віссю **x'** (проекція **x** на **П'**) дорівнює **α**, між **y** і **y'** – **β**, між **z** і **z' – γ**. Якщо відрізок розташований на осі **x** або на лінії паралельної осі **x**, то його кут нахилу до площини **П'** дорівнює **α**, якщо – на осі **y**, то – **β**, якщо – на осі **z**, то – **γ**. Тоді $|O'A_x'| = |OA_x|\cos\alpha$, $|A_x'A_1'| = A_xA_1|\cos\beta$, $|A_1'A'| = |A_1A|\cos\gamma$. Введемо наступні позначення: $u = \cos\alpha$; $v = \cos\beta$; $w = \cos\gamma$. Числа **u, v, w** називаються **коефіцієнтами спотворення** по аксонометричних осях **x', y', z'** відповідно. Знаючи координати точки **A(x; y; z)** і коефіцієнти **u, v, w**, можна знайти аксонометричні координати точки **A' (x';y';z'):** $x' = x_A u$; $y' = y_A v$;
$y' = y_A w$. Для коефіцієнтів спотворення справедлива залежність яку приймаємо без доказу

$$u^2 + v^2 + w^2 = 2, \tag{9.1}$$

Оскільки проекції фігури на паралельні площини рівні, то замість **П'** (рис. 9.1) можна взяти будь-яку площину їй паралельну. Для підвищення наочності ортогональних аксонометричних проекцій позитивні півосі осей **x, y, z** розташовують в одному півпросторі щодо аксонометричної площини, проведеної через початок координат (рис. 9.1, точка **O**). При цьому кути **α, β, γ** будуть більше нуля, але менше дев'яноста градусів. Тоді коефіцієнти **u, v, w** (косинуси цих кутів) будуть менші одиниці, але більше нуля.

Якщо відомі коефіцієнти спотворення **u, v, w**, то легко знайти кути **α, β, γ** **(α = arcos u, β = arcos v, γ = arcos w).** Знаючи коефіцієнти спотворення **u, v, w** і визначивши по них кути **α, β, γ,** можна знайти кути між аксонометричними осями. Формула (1.1) для розрахунку проекції кута, що при проектуванні прямого кута $(\varphi = 90^0)$ на площину **П'**$(\varphi 1 = \varphi ')$ має вигляд:

$$\cos\varphi ' = -\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta. \tag{9.2}$$

Наприклад, кут між осями **x** і **y** дорівнює **90°**, тобто (**x,y**) = **90°**, він проектується на площину **П'** у кут між осями **x'** і **y'**. По формулі (9.2)

$\cos(x',y') = -\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta$, де **α** – кут між **x** і **x'**, **β** – кут між **y** і **y'**

За величиною косинуса знайдемо кут між аксонометричними осями **x'** і **y'**. Аналогічно можна знайти й два інших кути.

Звернемо увагу на те, що кути між аксонометричними осями більше 90° (тупі), тобто прямі кути між осями проектуються в тупі кути між аксонометричними осями. Дійсно, у формулі (9.2) тангенси гострих кутів більше нуля, виходить, косинус проекції кута негативний, тобто проекція кута більше 90°.

Розглянемо побудову аксонометричної проекції точки **A** за комплексним кресленням цієї точки (рис. 9.15). Нехай на аксонометричній площині **П'** відоме положення осей **x', y', z'** і відомі коефіцієнти спотворення по цих осях **u, v, w** (рис. 9.16).

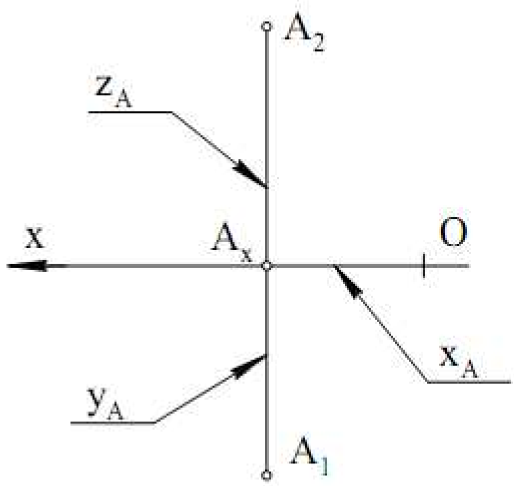


Рис.9.15

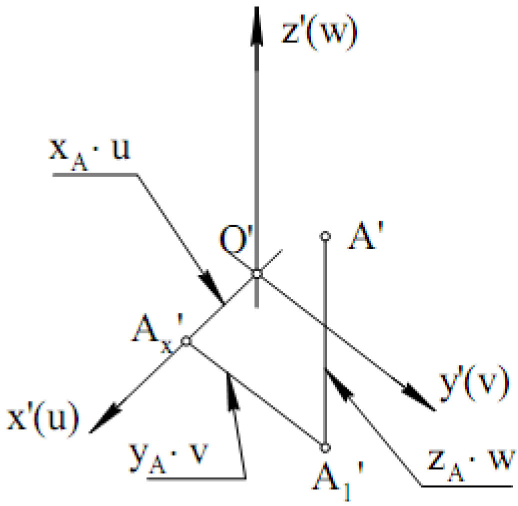


Рис.9.16

Звернемо увагу на те, що на рис. 9.15 аксонометрична площина є площиною креслення. Вісь **z'** завжди розташовується вертикально. Замірявши на комплексному кресленні відповідні відрізки, знаходимо координати **x, y, z**. Помножимо координати на коефіцієнти спотворення, побудуємо аксонометричну координатну ламану **OAx'₁'A'** і аксонометричну проекцію точки **A** – точку **A'**. Якщо яка - небудь координата менша нуля (негативна), то аксонометричний координатний відрізок (ланка аксонометричної координатної ламаної) відкладається в протилежну сторону щодо позитивного напрямку, зазначеного стрілкою на аксонометричній осі.

2.1. Ортогональна (прямокутна) ізометрична проекція

Ортогональна ізометрична проекція (ізометрія) є ортогональною аксонометричною проекцією при **u = v = w**. За формулою (9.1) одержимо **u =v = w = 0,82**. За формулою (9.2) визначимо, що кут між будь-якими осями **120°**.

Побудову ізометрії точки виконуємо так само, як показано на рис. 9.15, 9.16. Кожну координату точки необхідно помножити на **0,82**. Така ізометрія називається точною або теоретичною. Якщо ізометрію точки виконати в масштабі **1,22:1**, то координату точки потрібно помножити на **0,82** (коефіцієнт спотворення по осі), а потім помножити на **1,22** (збільшення через виконання в масштабі), тоді ізометрична координата, наприклад, $\mathbf{x_A'}$ дорівнює $\mathbf{0{,}82 \cdot 1{,}22 \cdot x_A = x_A}$.

Виходить, при виконанні ізометрії в масштабі **1,22:1** (масштаб приведення) можна координати точки не множити на коефіцієнти спотворення, а брати їх такими ж, як на комплексному кресленні. Ізометрія, виконана в масштабі **1,22:1**, називається приведеною або практичною, коефіцієнти спотворення при цьому $\mathbf{u = v = w = 1}$.

На рис. 9.17 показане комплексне креслення куба зі зрізаною вершиною. На рис. 9.18 побудована його приведена ізометрія. Поруч з ізометрією дана схема розташування ізометричних осей з вказівкою коефіцієнтів спотворення і масштабу приведення. На рис. 9.17 в якості системи координат, пов'язаної з кубом, узята **Gtqr,** а не система координат **Oxyz** комплексного креслення, як на рис. 9.15, 9.16.

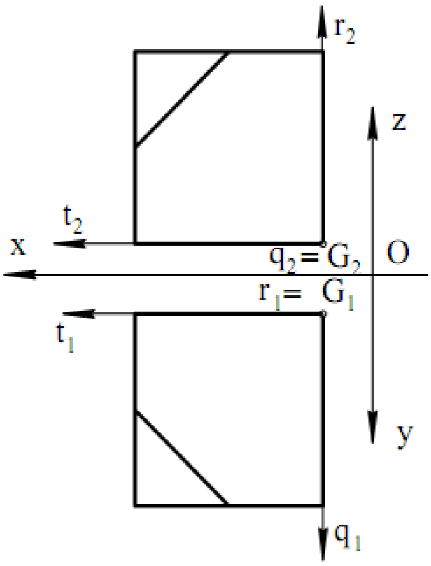


Рис. 9.17

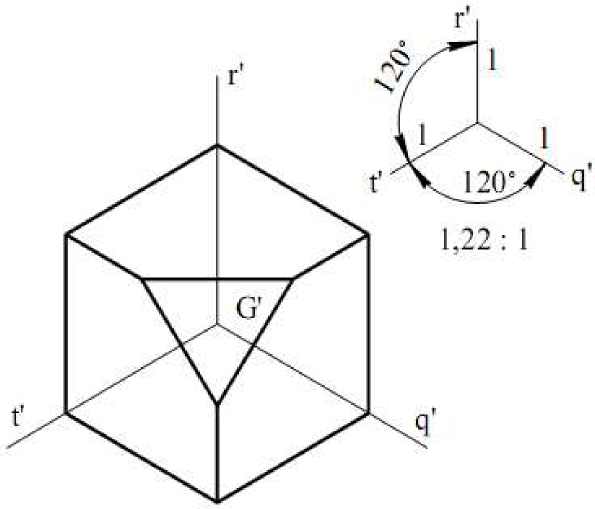


Рис. 9.18

Система **Gtqr** задана своїми проекціями $\mathbf{G_1t_1q_1r_1}$ і $\mathbf{G_2t_2q_2r_2}$. Тепер ця система проектується в ізометричну систему координат і щодо неї беруть координати вершин куба.

Ізометрію куба легко побудувати, якщо побудувати ізометрію його вершин і з'єднати їх. Побудуйте, як вправу, ізометрію куба, зв'язавши з ним систему координат комплексного креслення **Oxyz**, що в цьому випадку буде проектуватися в ізометричну систему координат.

На рис. 9.19 показане комплексне креслення кривої **k**, на рис. 9.20 побудована приведена ізометрія цієї кривої.

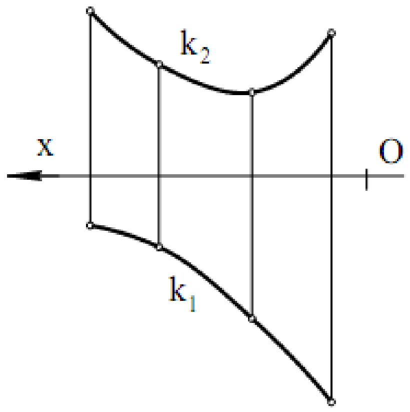


Рис. 9.19

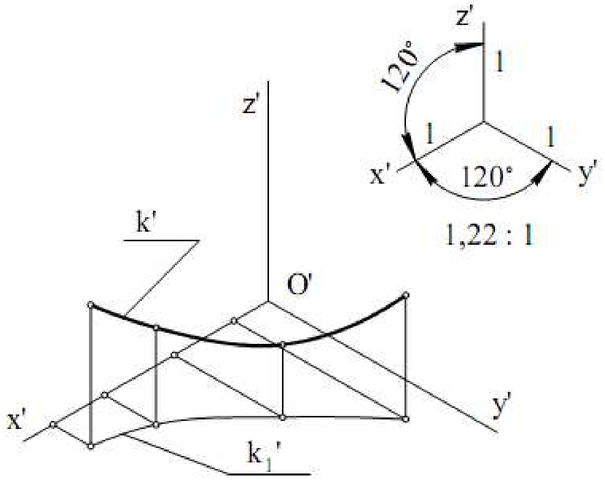


Рис. 9.20

Як система координат, пов'язана з кривою, взята система координат комплексного креслення **Oxyz**, що проектується в ізометричну систему координат **O'x'y'z'.** Для побудови ізометрії кривої необхідно побудувати ізометрію ряду її точок і з'єднати їх кривою лінією. Так можна побудувати ізометрію будь-якої кривої, але для побудови ізометрії кола зручно використати спеціальні методи. Нехай коло діаметром **d** розташоване в площині **Oxy** (або в площині, паралельній **Oxy**). Це коло проектується на аксонометричну площину в еліпс. Всі діаметри еліпса, крім одного, будуть менше діаметра кола. Великий діаметр еліпса дорівнює діаметру кола і є проекцією діаметра кола, розташованого на лінії рівня, паралельної до аксонометричної площини **П'**. Великий діаметр розташований на проекції лінії рівня. Лінія рівня «збереже» не тільки довжину діаметра **d** кола, але й прямий кут із прямою лінією, що їй перпендикулярна (теорема про проектування прямого кута). Вісь **z** перпендикулярна площині **Oxy**, і виходить, перпендикулярна до будь-якої прямої цієї площини, у тому числі й лінії рівня. Тоді аксонометрична проекція лінії рівня, на якій розташований великий діаметр еліпса, перпендикулярна до проекції осі **z** – аксонометричної осі **z'**. Малий діаметр еліпса перпендикулярний до великого діаметра. При виконанні ізометрії в масштабі **1,22:1** великий діаметр буде дорівнювати **1,22d**. Малий діаметр дорівнює **0,71d** (приймаємо без висновку). Еліпс будуємо по великому й малому діаметрах. Повторюючи все сказане вище, для площин **Oxz** і **Oyz**, одержимо розташування еліпсів, показане на рис. 9.21. Коло **t**, розташоване в площині **Oxy** або їй паралельній площині, проектується на **П'** в еліпс **t'**, що є ізометрією кола **t**. Ізометрією кола **n**, що належить площині **Oxz** або їй паралельній площині, буде еліпс **n'.**

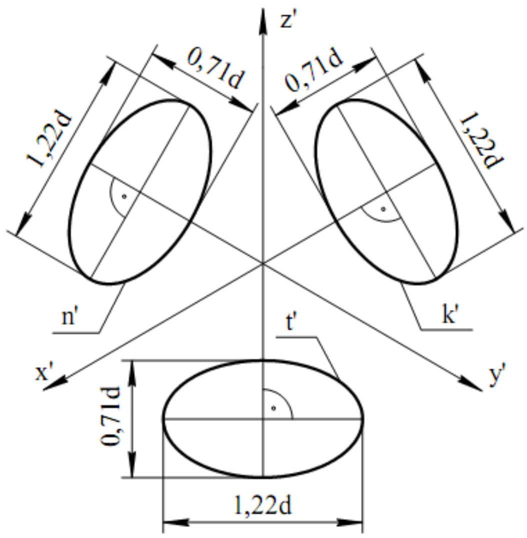


Рис. 9.21

Ізометрією кола **k**, що належить площині **Oyz** або їй паралельній площині, буде еліпс **k'**. Ізометрії кіл, приналежних площинам **Oxy, Oxz, Oyz** або їм паралельним площинам, будуємо в такій послідовності: будуємо ізометрію центра кола; будуємо великий і малий діаметри; по великому й малому діаметрам будуємо ряд точок еліпса; точки еліпса з'єднуємо плавною кривою.

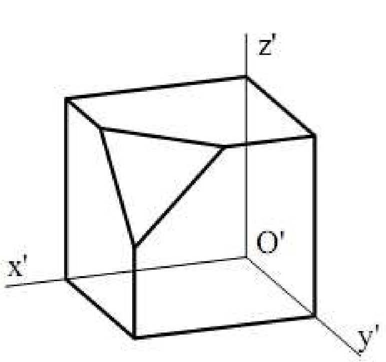
Якщо коло належить площині загального положення, то прямої, перпендикулярної до цієї площини, на ізометрії немає. Тому необхідно на комплексному кресленні через центр кола провести відрізок прямої перпендикулярної до площини кола. Потім побудувати ізометрію цього відрізка й провести великий діаметр перпендикулярно ізометрії цього відрізка, через ізометрію центра кола. Великий діаметр дорівнює **1,22d**, де **d** – діаметр кола. Далі, на комплексному кресленні кола взяти будь-яку точку кола і побудувати її ізометрію.

Тепер на ізометрії є великий діаметр еліпса й одна його точка. Виходить, можна виконати побудову еліпса по великому діаметру й точці.

2.2. Ортогональна (прямокутна) диметрична проекція

Ортогональна диметрична проекція (диметрія) є ортогональною аксонометричною проекцією при **u = w, v = 0,5u**. По формулі (9.1) одержимо: **u = w = 0,94: v = 0,47**. За формулою (9.2) визначимо, що кут між осями **x'** і **y'** дорівнює **97^0 10'**, кут між осями **x'** і **y'** дорівнює **131°25'**. Побудова диметрії точки виконується так само, як показано на рис. 9.15, 9.16. Коефіцієнти спотворення: **u = w = 0,94; v = 0,47**. Така диметрія називається точною (теоретичною). Точно так само, як в ізометрії, вводимо масштаб приведення, що у цьому випадку дорівнює **1,06:1**, тому що **0,94·1,06 ≈ 1.**

Коефіцієнти спотворення при цьому **u = w = 1, v = 0,5**. Диметрія, виконана в масштабі **1,06:1**, називається приведеною (практичною) диметрією. На рис. 9.22 показана диметрія куба зі зрізаною вершиною, комплексне креслення якого наведене на рис. 9.17. Поруч з диметрією дана схема розташування диметричних осей із вказівкою коефіцієнтів спотворення і масштабу приведення. На рис. 9.23 показана диметрія кривій **k**, комплексне креслення якої наведене на рис. 9.19.



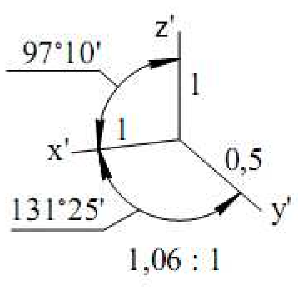


Рис.9.22

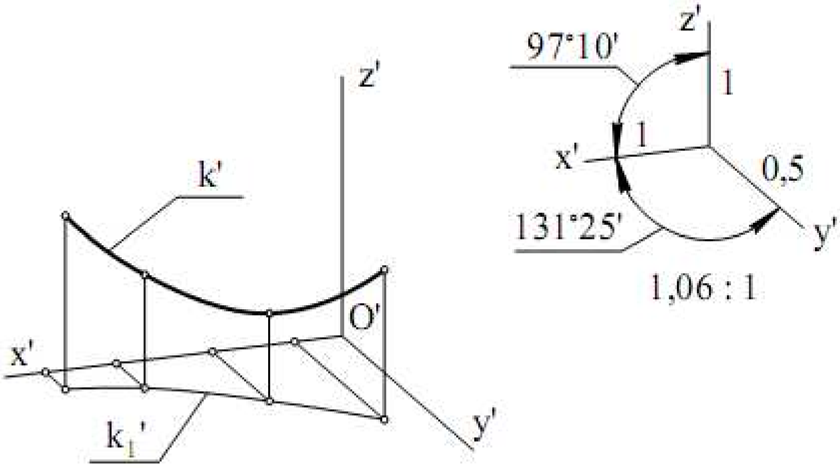


Рис.9.23

Кола **t, n, k**, розташовані в площинах **Oxy**, **Oxz**, **Oyz** або їм паралельних площинах, проектуються в еліпси **t', n', k'** (рис. 9.24). Більші діаметри рівні **1,06d**, тому що масштаб приведення **1,06:1**. Малий діаметр в **t'** і **k**' дорівнює **0,35d**, в **n' – 0,94d** (приймаємо без висновку).

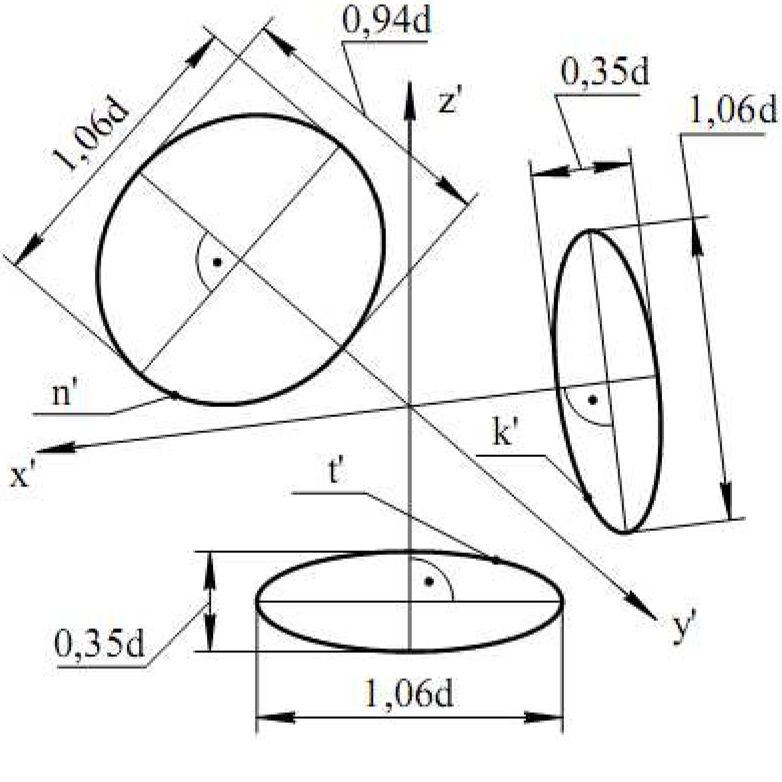


Рис. 9.24

Диметрію кола, що належить площині загального положення, будуємо так само, як і ізометрія. Великий діаметр еліпса дорівнює **1,06d**, де **d** – діаметр кола. У побудові ізометрії й диметрії фігури багато спільного, тому що ізометрія й диметрія - це окремі випадки (конкретні види) прямокутної аксонометричної проекції, але є й відмінності, викликані тим, що в ізометрії й диметрії різні коефіцієнти спотворення по осях.

У курсі інженерної графіки при виконанні ізометрії і диметрії деталей для підвищення наочності робиться виріз частини деталі. На рис. 9.25, 9.26 показана ізометрія й диметрія куба з циліндричним отвором. Напрямок штрихування в кожній із площин визначається по трикутнику штрихування, що доданий до зображення осей. Вершини трикутників штрихування лежать на осях і віддалені від початку координат на відстані, пропорційні коефіцієнтам спотворення. В ізометрії ці відстані рівні між собою **(u = v = w = 1),** у диметрії відстань по осі **y** два рази менше, ніж по осях **x** і **z (u = w =1, v = 0.5).**

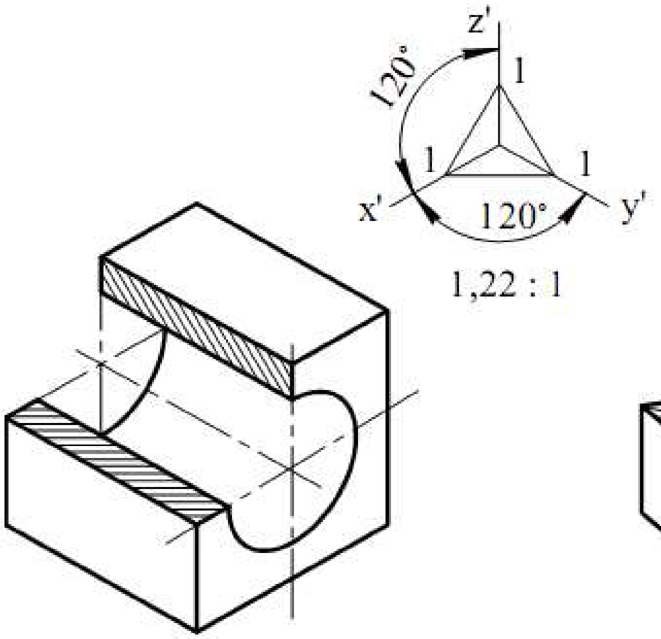


Рис.9.25

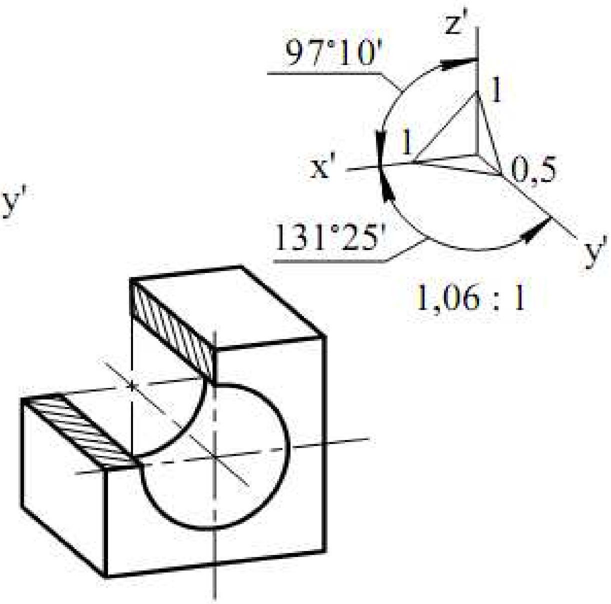


Рис.9.26

10. ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ

1. Побудувати КК **($П_1П_2П_3$)** точок **A(30; 40; 20), B(60; – 40; – 30)** (рис. 10.1).
2. Дано точку **A(70; 60; 30).** Побудувати точку **B**, симетричну точці **A** відносно **$П_1$** (рис. 10.2).
3. Дано прямі **a‖b** загального положення. Побудувати пряму **h‖$П_1$**, яка перетинає **a** і **b** і віддалену від **$П_1$** на **30** міліметрів (рис. 10.3).
4. Дано **A(90; 40; 30), B(10; 15; 20), З(60; 45; 20), D(30; 15; 40).** Побудувати прямі **(AB)** і **(CD)**. Записати координати конкуруючих точок (рис. 10.4).
5. Дано площину **(ΔABC),** проекції **D_2, E_1, F_2**. Побудувати проекції **D_1, E_2, F_1,** якщо **D, E, F** належать площині **(ΔABC)** (рис. 10.5).
6. Дано площину **(ΔDFE).** Через точку **D** провести горизонталь **h**, через точку **F** – фронталь **f** у цій площині (рис. 10.6).
7. Побудувати точку перетину прямої **e** і площини **(ΔABC),** указати видимість (рис. 10.7).
8. Побудувати лінію перетину площин **(ΔABC)** і **(ΔDFE)** (рис. 10.8).
9. Побудувати **КК** правої гвинтової лінії, розташованої на циліндрі і яка проходить через точку **A** (один виток), крок гвинтової лінії дорівнює **80** міліметрів (рис. 10.9).
10. Побудувати проекції кола **R40**, із центром **O**, що належить площині **Σ** (рис. 10.10).
11. Побудувати другі проекції точок, що належать сфері (рис. 10.11).
12. Побудувати другу проекцію лінії, що належить конічній поверхні (рис. 10.12).
13. Побудувати лінію перетину площини **Σ** і конічної поверхні **Г** (рис. 10.13).
14. Побудувати лінію перетину призми і проектуючої площини **Σ.** (рис. 10.14).
15. Побудувати лінію перетину поверхонь: а) рис. 10.15, б) рис.10.16, в) рис. 10.17.
16. Визначити натуральну величину (НВ) відрізка і кут його нахилу до площини **$П_1$** (рис. 10.18).
17. Визначити кут між прямою і площиною (рис. 10.7).
18. Визначити кут між площинами (рис. 10.8).
19. Визначити відстань від точки **N** до прямої (**BC**) (рис. 10.19).
20. Визначити кут і відстань між даними прямими (рис. 10.20).
21. Визначити НВ **(ΔABC**) і побудувати центр вписаного кола (рис. 10.21).
22. Через точку **D** провести пряму паралельну площині (Δ**ABC**), і яка перетинає пряму **EF** (рис. 10.22).
23. Побудувати ізометрію фігури (рис. 10.23).
24. Побудувати диметрію фігури (рис. 10.24).

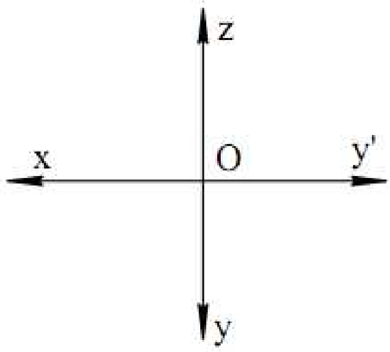


Рис.10.1

Рис.10.2

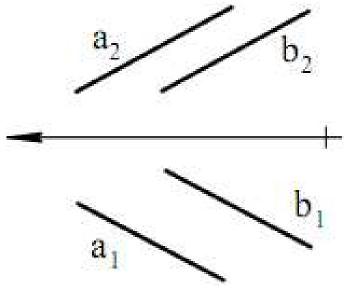


Рис.10.3

Рис.10.4

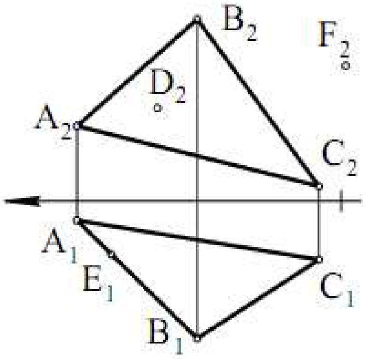


Рис.10.5

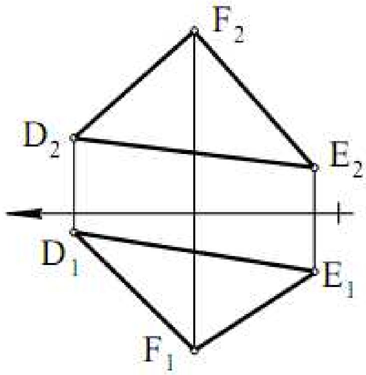


Рис.10.6

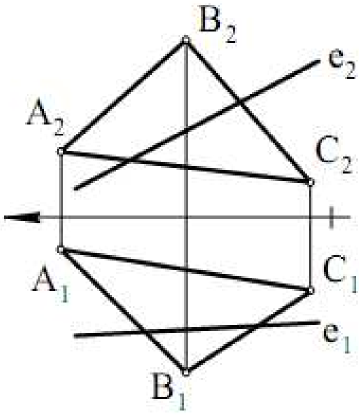


Рис.10.7

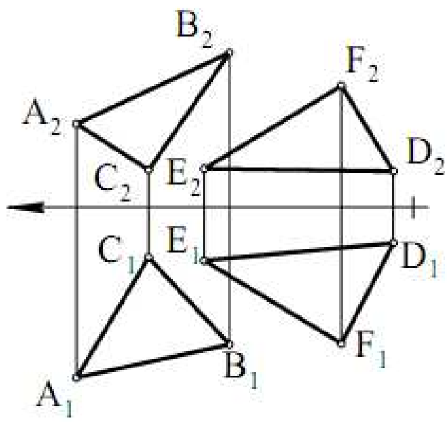


Рис.10.8

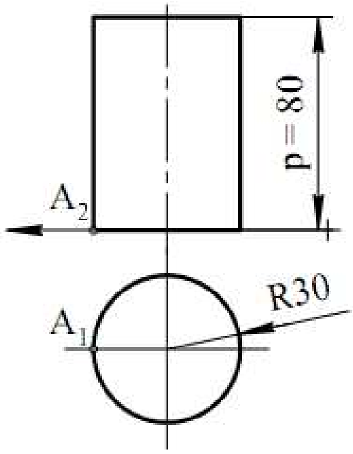


Рис.10.9

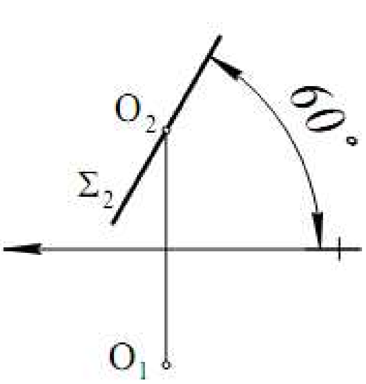


Рис.10.10

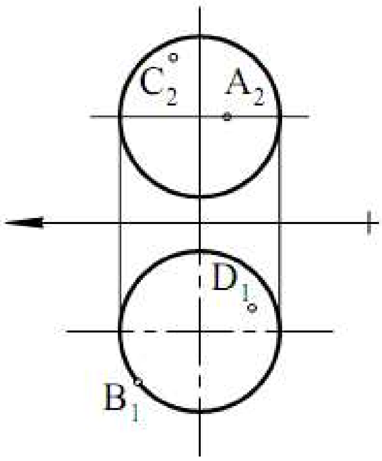


Рис.10.11

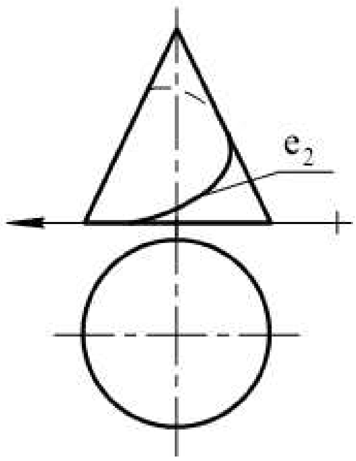


Рис.10.12

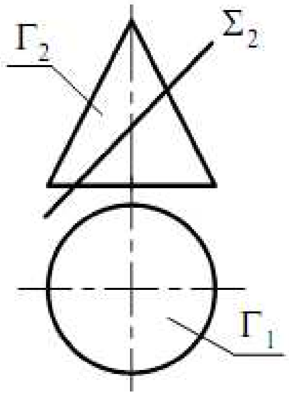


Рис.10.13

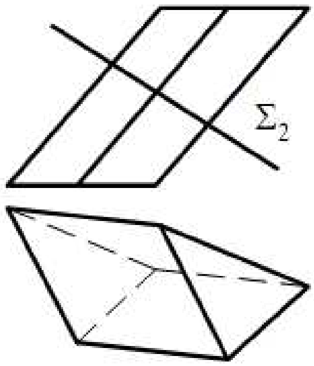


Рис.10.14

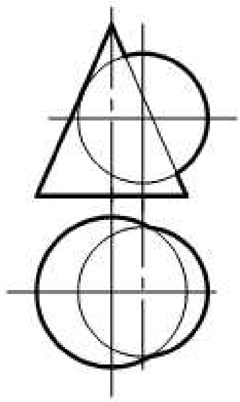


Рис.10.15

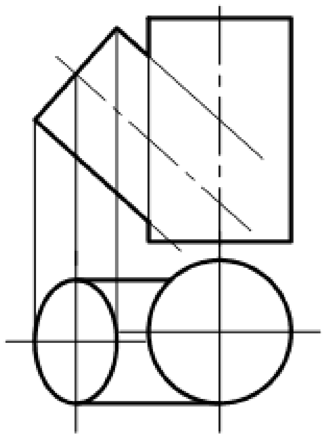


Рис.10.16

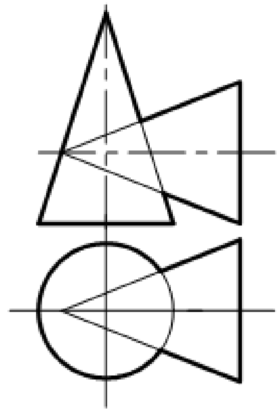


Рис.10.17

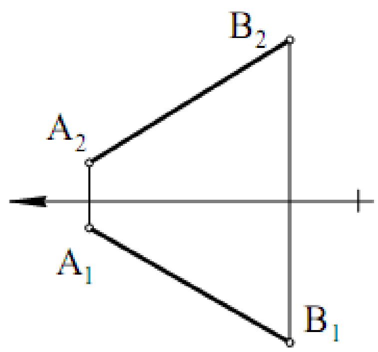


Рис.10.18

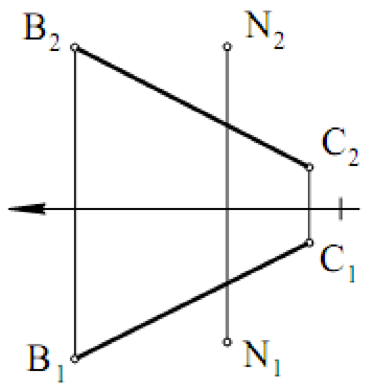


Рис.10.19

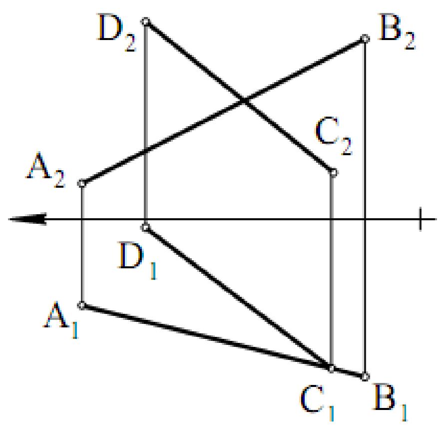


Рис.10.20

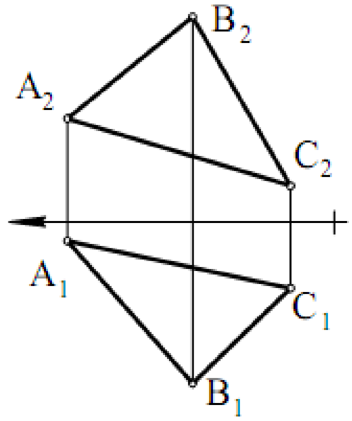


Рис.10.21

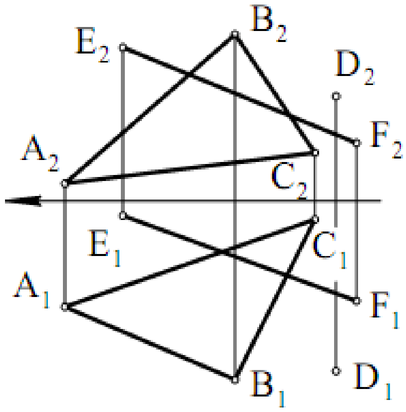


Рис.10.22

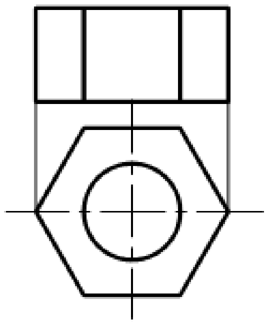


Рис.10.23

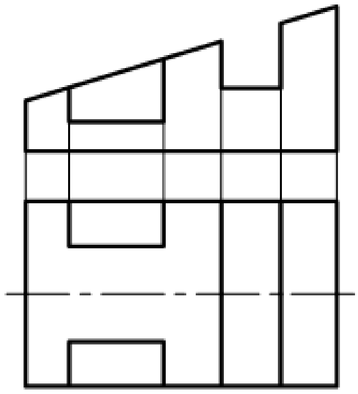


Рис.10.24

25. Добудувати на Π_1 проекцію плоского п'ятикутника **ABEFC**, якщо **A(50; 10; 15), B(25; 0; 0), C(30; 30; 30), E(10; ...; 5), F(5; ...; 15).**

26. Побудувати пряму **t**, паралельну прямій (**EF**) і яка перетинає прямі (**AB**) і (**CD**), якщо **A(80; 10; 5), B(50; 20; 25), C(65; 30; 30), D(40; 20; 5), E(30; 5; 15), F(5; 30; 15).**

27. Знайти точку перетину площини $\boldsymbol{\Sigma(a \parallel b)}$ і прямої (**MK**), указати видимість. Визначити кут між прямою і площиною (рис. 10.25).

28. Знайти точки перетину прямої **e** з поверхнею тора, вказати видимість проекцій прямої (рис. 10.26).

29. Побудувати лінію перетину поверхонь: а) рис. 10.27; б) рис. 10.28.

30. На прямій лінії (**CD**) знайти точку, рівновіддалену від кінців відрізка **AB**, якщо **A(70; 30; 10), B(35; 15; 40), C(90; 20; 35), D(40; 30; 45).**

31. Побудувати проекцію $\mathbf{A_2B_2}$ відрізка **AB**, якщо його натуральна величина дорівнює **70** мм і **A(80; 30; 30), B(30; 60; …).**

32. Побудувати рівносторонній трикутник **ABC**, якщо задано його сторону **AB** і відомо, що площина трикутника становить **45°** із площиною проекцій $\mathbf{\Pi_2}$, **A(125; 30; 20), B(80; 30; 40).** Визначити число рішень.

33. Побудувати: а) ізометрію циліндра і гвинтової лінії (задача 9, рис.10.9); б) диметрію конуса і лінії **e** (задача 12, рис. 10.12).

34. Побудувати розгортки: а) поверхні призми (рис. 10.14); б) циліндричної поверхні і гвинтової лінії (задача 9, рис. 10.9); в) конічної поверхні і лінії **e** (задача 12, рис. 10.12); г) сфери радіуса **50** мм.

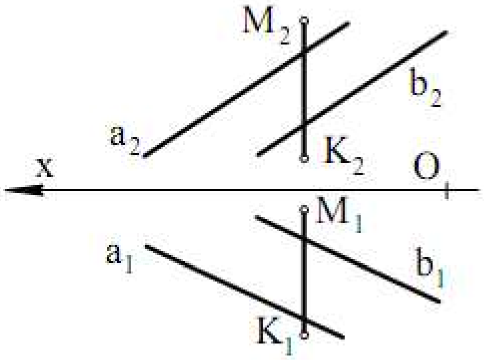


Рис.10.25

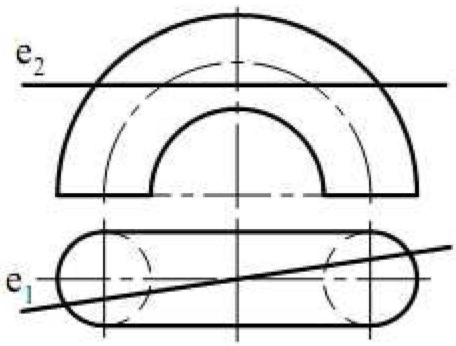


Рис.10.26

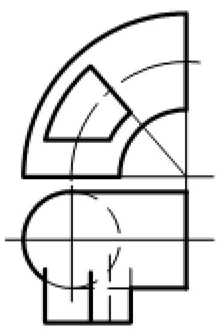


Рис.10.27

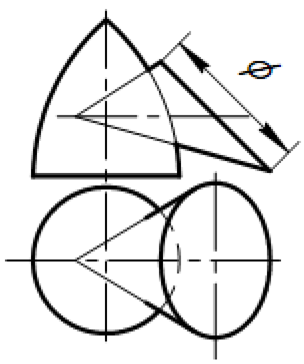


Рис.10.28

СЛОВНИК ТЕРМІНІВ

Аксонометрія (від давньогрецького 'аксон'- вісь, 'метріо'- вимірюю) - наочне зображення предмета на кресленні, тобто зображення предмета у трьох вимірах. Зображуваний предмет розташовується стосовно деякої площини проекцій так, що при паралельному проектуванні на неї жодна з осей координат, до яких він віднесений у просторі, не проектується на площину проекцій у вигляді точки.

Аксонометричні проекції бувають **ізометричними** (ізо - однаковий), **диметричними** (ди - подвійний), **триметричними**, а також **прямокутними** й **косокутними.**

Горизонталь - пряма, що лежить у площині й паралельна площині проекцій $\mathbf{П_1}$.

Горизонтально проектуюча площина, - площина, перпендикулярна до площини проекцій $\mathbf{П_1}$.

Евклідовий простір - тривимірний простір, в якому діють аксіоми Евкліда (ІІІ в. до н.е.).

Конічна поверхня - це поверхня, утворена рухом прямої лінії по деякій кривій і проходячи у всіх своїх положеннях через нерухому точку, названу вершиною конічної поверхні.

Конкуруючі точки - пари точок, що лежать на проектуючих прямих.

Координати якої - небудь точки - це числа, що виражають її відстані від трьох взаємно перпендикулярних площин, названих площинами координат.

Косокутна аксонометрична проекція - проекція, коли напрямок проектування не перпендикулярний до площини проекцій.

Криві 2-го порядку - це плоскі криві, обумовлені: п'ятьома точками, або чотирма точками й однією дотичною, або трьома точками й двома дотичними, або двома точками й трьома дотичними і т.д. Дотичні можуть проходити через задані точки. Підрозділяються криві 2-го порядку на три види: еліпс, параболу, гіперболу.

Лінія 1-го порядку - пряма.

Лініями найбільшого нахилу площини до площин $\mathbf{П_1}$, $\mathbf{П_2}$, $\mathbf{П_3}$ називають прямі, що лежать у ній і перпендикулярні або до горизонталей площини, або до її фронталей, або до її профільних прямих. Відповідно визначається нахил площини до площин $\mathbf{П_1}$, $\mathbf{П_2}$ або $\mathbf{П_3}$.

Лінії нахилу площини - прямі площини , перпендикулярні до її ліній рівня.

Лінії рівня площини - прямі лінії, що лежать у площині й паралельні площинам проекцій.

Лінії скату - лінії, перпендикулярні до горизонталей площини.

Метод конкуруючих точок - метод використання конкуруючих точок для визначення видимості елементів креслення.

Метод Монжа - паралельні прямокутні проекції на дві взаємно перпендикулярні до нерухомих площин проекцій - основний метод складання технічних креслень.

Метод проекцій - метод, яким у нарисній геометрії одержують зображення.

Метричними називаються задачі на визначення відстаней, кутів, площ.
Многогранник - поверхня, що складається з декількох площин, що обмежує деяке тіло. У цьому випадку грані є частинами площин. Зображення многогранника зводиться до зображення його ребер, тобто ліній перетину граней, і вершин - точок перетину ребер.
Нарисна геометрія - наука про методи побудови зображень просторових форм на площині. Крім цього, вона викладає способи графічного рішення ряду задач, пов'язаних з тілами, які мають три виміри, на плоскому кресленні.
Нормаль даної поверхні в даній точці - пряма, перпендикулярна до дотичної площини в точці дотику.
Площина - сукупність всіх прямих, що проходять через деяку нерухому точку й перетинають поза нею нерухому пряму лінію.
Площина, дотична до площини в даній точці - це площина, що містить прямі, дотичні до всіх кривих, що лежать на заданій поверхні й проходять через дану точку.
Позиційними називаються **задачі** на розташування геометричних елементів.
Проектуючі прямі -прямі, що проходять через центр проекцій і проектуються в точки .
Профільна пряма - пряма, що лежить у площині й паралельна площині проекцій $\mathbf{П_3}$.
Профільна площина - площина, перпендикулярна до площин $\mathbf{П_1}$ і $\mathbf{П_2}$, тобто паралельна $\mathbf{П_3}$.
Пряма загального положення - пряма, не паралельна до жодної з площин проекцій.
Пряма окремого положення - пряма, паралельна до однієї із площин проекцій або двом площинам проекцій, тобто перпендикулярна до третьої.
Прямокутна аксонометрична проекція - проекція, коли напрямок проектування перпендикулярний до аксонометричної площини проекцій . У прямокутній аксонометричній проекції осі приєднаних прямокутних координат розташовують не паралельно до площини аксонометричних проекцій.
Прямокутна (ортогональна) проекція точки - основа перпендикуляра, проведеного із точки на площину проекцій.
Ортогональні проекції двох взаємно перпендикулярних прямих, одна з яких паралельна площині проекцій, а інша не перпендикулярна їй, взаємно перпендикулярні.
Якщо **прямі перетинаються**, то їхні однойменні проекції перетинаються між собою, а проекції точок перетину лежать на одній лінії зв'язку (наслідок2)
Якщо в просторі **прямі паралельні**, то їхні однойменні проекції паралельні між собою (наслідок 1).
Якщо в просторі **прямі мимобіжні**, то їхні однойменні проекції перетинаються між собою, але проекції точок перетину не лежать на одній лінії зв'язку
(наслідок 3).
Пряма належить площині , якщо вона проходить через дві точки, що належать площині, або через одну точку цієї площини паралельно прямій, що лежить у цій площині або їй паралельна.

Розгорткою поверхні якого-небудь тіла називається фігура, отримана суміщенням поверхні цього тіла із площиною креслення.

Відстань від точки до площини дорівнює довжині перпендикуляра, опущеного із точки на цю площину.

Відстань від точки до поверхні обертання , незалежно від її виду визначається довжиною перпендикуляра (нормалі), опущеного із точки на найближчу до неї твірну (меридіан) поверхні.

Відстань між паралельними прямими виміряється довжиною перпендикуляра, опущеного з довільної точки однієї прямої на іншу.

Відстань між мимобіжними прямими лініями визначається відрізком прямої, перпендикулярної до обох прямих.

Відстань між паралельними площинами виміряється довжиною перпендикуляра, опущеного з будь-якої точки однієї площини на іншу.

Спосіб аксонометричного проектування полягає в тому, що дана фігура разом з осями прямокутних координат, до яких вона віднесена в просторі, проектується паралельно на деяку площину, прийняту за площину аксонометричних проекцій (цю площину називають також **картинною площиною**).

Спосіб суміщення - перетворення площини загального або окремого положення в площину рівня. **Суміщення** - окремий випадок обертання навколо горизонталі або фронталі, коли віссю обертання є горизонтальний або фронтальний слід площини. При обертанні площини навколо її горизонтального або фронтального сліду до суміщення з відповідною площиною проекцій лежача в цій площині фігура зпроектується на площину проекцій у натуральну величину.

Кут між двома пересічними прямими лініями проектується без спотворення на площину, паралельну площині кута.

Кут між двома мимобіжними прямими лініями вимірюється кутом між двома пересічними прямими, паралельними даним мимобіжним прямим.

Кут між прямою лінією і площиною вимірюється кутом між прямою і проекцією її на цю площину.

Кут між двома площинами є двогранним.

Фронталь - пряма, що лежить у площині й паралельна площині проекцій $\mathbf{П_2}$.

Фронтальна площина - площина, перпендикулярна до площин проекцій $\mathbf{П_1}$ і $\mathbf{П_3}$, тобто паралельна $\mathbf{П_2}$.

Центр проектування - точка – джерело проектуючих променів.

Центральна проекція заданої точки - точка перетину прямої з площиною проекцій.

Центральне проектування -проектування, коли всі проектуючі промені виходять із власної точки (точки, що перебуває в доступному зору просторі).

Циліндрична поверхня - це поверхня, утворена прямою лінією, що переміщається в просторі по деякій нерухомій кривій, залишаючись паралельною заданому напрямку.

Епюр - (із фр. "креслення") зображення, отримане в результаті повороту площини проекцій $\mathbf{П_1}$ на кут $\mathbf{90^0}$ до суміщення з площиною проекцій $\mathbf{П_2}$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Антонович Є.А. та ін. Нарисна геометрія. Практикум: Навч. Посібник / За ред. проф. Є.А. Антоновича. –Львів: Світ, 2004. -528 с.

2. Бубенников А.В. Начертательная геометрия / А.В. Бубенников, М.Я. Громов. – М.: Высш. шк., 1973. – 416 с.

3. Гордон В.О., М.А. Семенцов-Огиевский. Курс начертательной геометрии: Учеб. Пособие для втузов/ Под ред. В.О. Гордона и Ю.Б. Иванова.- 24-изд., стер. – М.: Высш. шк., 2000.- 272 с.

4. Иванов Г.С. Начертательная геометрия: Учебник для вузов. – М.: Машиностроение, 1995. – 224 с.

5. Котов И.И. Начертательная геометрия. – М.: Высш. шк., 1970. – 384 с.

6.Лагерь А.И. Инженерная графика /А.И. Лагерь, Э.А. Колесникова. – М.: Высш. шк., 1985. – 176 с.

7.Михайленко В.Е. Инженерная графика /В.Е. Михайленко, А.М. Пономарев. – Київ: Вища шк., 1985. – 295 с.

8. Начертательная геометрия: Учебник для вузов / Н.Н. Крылов, П.И. Лобандиевский, С.А. Мэн, В.Л. Николаев, Г.С. Иконникова. – М.: Высш. шк., 1977. – 231с.

9. Посвянский А.Д. Краткий курс начертательной геометрии. – М.: Высш. шк., 1974. – 191 с.

10. Четверухин Н.Ф. Начертательная геометрия / Н.Ф. Четверухин, В.С. Левицкий, З.И. Прянишникова и др. – М.: Высш. шк., 1963. – 420 с.

11. Фролов С.А. Начертательная геометрия. – М.: Машиностроение, 1983. – 240 с.

Навчальне видання

Нарисна геометрія. Курс лекцій. (для студентів 1 курсу денної форми навчання напрямів підготовки 0922 – «Електромеханіка», 0906 – «Електротехніка», 1004 – «Транспортні технології», 0708 – «Екологія»).

Укладач: Володимир Іванович Лусь

Редактор: М.З. Аляб'єв

План 2008, поз. 35 Л

Підп. до друку 31.03.2008	Формат 210 x 297 1/8	Папір офісний
Друк на ризографі	Умовн.-друк. арк. 5,6	Обл.-вид. арк. 6,0
Замовл. №	Тираж 150 прим.	

61002, Харків, ХНАМГ, вул. Революції, 12

Сектор оперативної поліграфії ІОЦ ХНАМГ

61002, Харків, ХНАМГ, вул. Революції, 12